Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

62e jaargang
1986 | 1987
februari

Euclides 5

Wolters-Noordhoff

Euclides

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 50,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 35,–; contributie zonder Euclides *f* 30,–. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij Prof dr F. Goffree, Bremlaan 16, 3735 KJ Bosch en Duin, tel. 030 - 78 37 23. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½, bij voorkeur op Euclides-kopijbladen. De redactiesecretaris P. E. de Roest, Blijhamsterweg 94, 9672 XA Winschoten, tel. 05970-2 20 27 stuurt desgevraagd kopijbladen met gebruiksaanwijzing toe. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Breitnerstraat 52[c], 8932 CD Leeuwarden, tel. 058-13 59 76.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. J. M. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 44,75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 26,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 63 08. Giro: 1308949. Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen. Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 7,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

ISSN 01.65-0394

Jaarrede 1986

De laatste jaren bent u gewend dat een verslag van het Hewetexperiment de jaarrede opent. Ook dit jaar is dit weer het geval, hoewel het Hewetproject als vrijwel afgesloten kan worden beschouwd. Dit jaar hebben 49 dagscholen voor vwo deelgenomen aan de eindexamens voor wiskunde A en B. Een vergelijking met de resultaten van de ongeveer 430 overige vwo-scholen ligt voor de hand en lijkt statistisch niet onverantwoord. Welnu, de gemiddelde scores bij wiskunde A en B waren respectievelijk 71 en 68; bij wiskunde I en II kwam men uit op een gemiddelde van respectievelijk 64 en 60.
Het aantal onvoldoendes bij A en B bedroeg respectievelijk 19 en 23%; bij I en II waren die percentages respectievelijk 30 en 38.
Zo'n vergelijking zegt niet alles. Maar als we bedenken dat de examens wiskunde I en B vergelijkbaar van moeilijkheidsgraad waren, ja voor driekwart identieke opgaven bevatten, dan is een voorzichtige conclusie op zijn plaats dat de herverkaveling van de wiskunde in het vwo een positief effect heeft op de examenresultaten.
Wat zeker ook tot tevredenheid stemt is het aantal wiskundekiezers op de experimenteerscholen. Voor wiskunde A waren er zo'n 2770 kandidaten, voor wiskunde B 2120. Ter vergelijking: voor wiskunde I deden 27440 leerlingen examen, voor wiskunde II 6330.
Belangrijker nog dan al die getallen zijn de berichten die ons bereiken over de sfeer en de inhoud van het onderwijs in wiskunde A. De concrete, op de realiteit gerichte benadering van de wiskunde spreekt veel leerlingen en ook docenten aan. Hewet is meer dan een frisse wind die door het tuimelraam het lokaal inblaast. Hewet is een principiële koerswijziging in de wiskunde van het vwo, een koerswijziging waarop in de onderbouw geanticipeerd moet worden. Een koerswijziging ook die niet beperkt mag blijven tot het vwo. In het lbo, het mavo en het havo is de behoefte aan een grondige herziening van de leerplannen zo mogelijk nog klemmender.
Het bestuur is van mening dat er hiervoor een grote behoefte bestaat aan een coördinerende commissie, een stuurgroep zogezegd. Al vanaf najaar 1985 gonst het van de geruchten dat er zo'n stuurgroep zou worden geformeerd, zelfs de naam van de voorzitter van de groep is een publiek geheim. Samen met het bestuur van de NVORWO heeft het bestuur onlangs een brief geschreven naar de staatssecretaris waarin een aantal knelpunten van het wiskundeonderwijs worden gesignaleerd en waarin wordt aangedrongen op spoedige instelling van een commissie die zich zal buigen over de longitudinale planning van het reken- en wiskundeonderwijs en over de examenprogramma's lbo/mavo.
Er zijn reeds allerlei hoopgevende ontwikkelingen gaande in het gebied 12-16. Deze dag zal daar, naar wij verwachten, weer een bewijs van zijn.
Ook het project 'Scholen in Ontwikkeling', het zogenaamde SiO-project, waaraan zo'n 300 scholen deelnemen, is een voorbeeld van deze ontwikkelingen.
De deelnemende scholen willen bereiken dat:
- de periode van onderwijs aan heterogene groepen wordt verlengd,
- de realiteitswaarde van het onderwijs wordt verhoogd,
- het onderwijsaanbod wordt herzien om tegemoet te kunnen komen aan verschillen tussen de leerlingen,
- nieuwe leerinhouden worden geïntroduceerd.

Wiskundesecties die deelnemen aan het project worden voor het realiseren van de zojuist genoemde doelen ondersteund door een aanbod in werkgroepen en conferenties.
In de werkgroepen wordt met een viertal programma's gewerkt: een basisprogramma, een brugfaseprogramma, een keuzefaseprogramma en een afsluitingsfaseprogramma. Aan deze werkgroepen nemen zo'n 100 wiskundesecties deel; voor het merendeel van zeer brede scholengemeenschappen zoals avo-lbo en lbo-lbo scholengemeenschappen. Een kadergroep, bestaande uit 10 wiskundedocenten die zelf op de betreffende scholen lesgeven, 6

medewerkers van de NLO's, 1 medewerker van de SLO en een coördinator van de Landelijke Pedagogische Centra, verzorgt dit aanbod. Deze kadergroep gaat thans het tweede jaar in. Zolang echter de eindexamenprogramma's lbo/mavo en havo niet radicaal worden gewijzigd zal de vernieuwing beperkt blijven tot de onderbouwklassen van een deel van de scholen.
Met veel zorg hebben wij de ontwikkeling gevolgd van het lbo/mavo-examen wiskunde.
In 1987 is hier voor het eerst de zogenaamde 70-30 maatregel van toepassing, dat wil zeggen dat minimaal 70% van het examenwerk uit gesloten vragen moet bestaan.
Enkele weken geleden is aan alle scholen voor lbo en mavo een proefexamen gestuurd. Uit de inhoud van dit examen blijkt dat de CEVO binnen de genoemde grenzen al het mogelijke heeft gedaan om een goed examen te creëren. Toch maken wij ons zorgen over de grote hoeveelheid meerkeuzevragen en blijven wij bij de bezwaren die we al enige jaren geleden in een brief aan de staatssecretaris, mevrouw Ginjaar-Maas, opzonden.
Wij menen dat als meerkeuzevragen een complex karakter hebben, het ontbreken van een motivering van het antwoord – een motivering die zelfs niet gegeven màg worden – in strijd is met de praktijk van het wiskundeonderwijs, waar het motiveren van het antwoord altijd voorop staat.
Ook vrezen wij dat docenten, maar vooral leerlingen, in de verleiding komen veel te gaan trainen in het beantwoorden van meerkeuzevragen onder het motto: dan heb je in ieder geval al het grootste deel van de punten binnen!
Wij hopen dat in de toekomst de open vragen weer een ruimere plaats toebedeeld krijgen dan nu het geval is en dat het gebruik van gesloten vraagvormen beperkt blijft tot het afvragen van eenvoudige leerstof.
Wij hopen zelfs dat, indien de machinale verwerking van de eindexamens afgeschaft wordt, het examen weer geheel uit open vragen zal bestaan.
Voor een goed alternatief voor de meerkeuzevragen verwijzen wij naar het rapport dat de hiervoor ingestelde werkgroep (de werkgroep Mahieu) in 1981 uitbracht.
Na het voorlopig rapport van de Werkgroep ter voorbereiding van wijziging van het eindexamenprogramma wiskunde havo, dat vorig jaar naar alle scholen is gezonden, heeft de werkgroep in januari haar eindrapport aan de staatssecretaris aangeboden. In dit rapport zijn de opmerkingen verwerkt die op de hoorzittingen van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren naar voren zijn gebracht.
Dit rapport is aan de Onderwijsraad ter advisering aangeboden en op 18 juli is dit advies uitgebracht. Hoewel het bestuur ongeduldig is en het betreurt dat er dit cursusjaar niet begonnen kon worden met het Hawexproject, verwacht het wel dat, gelet ook op het uitermate positieve oordeel van de Onderwijsraad, in 1987 begonnen kan worden met leerstofexperimenten op een aantal scholen.
Ofschoon de vernieuwingen niet zo snel gaan als sommigen willen kan men toch op bijeenkomsten van wiskundeleraren horen dat men behoefte heeft aan meer contact met collega's in de omgeving; voornamelijk contact dat de functie heeft van gegevens uitwisselen, informatie krijgen over wiskundeprogramma's van andere scholen en dergelijke.
Daarom hebben het Landelijk Verband Nascholing Wiskunde en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren verleden jaar een 'Werkgroep Regionaal Samenwerkingsverband Wiskundeonderwijs' ingesteld. De taak van deze werkgroep was het ondersteunen van plaatselijke initiatieven voor het opzetten en instandhouden van gespreksgroepen.
De werkgroep heeft contacten gelegd met de onderwijscentra van diverse lerarenopleidingen om faciliteiten aan gespreksgroepen te bieden. Ook kunnen gespreksgroepen, als onderdeel van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, gebruik maken van de faciliteiten van de vereniging.
Om tot oprichting van gespreksgroepen te komen heeft de werkgroep in de lerarenbladen, waaronder Euclides, een oproep geplaatst aan wiskundedocenten die initiatiefnemer voor een regionale gespreksgroep willen zijn, zich bij de werkgroep te melden. Ook zijn enige tientallen docenten persoonlijk benaderd.
De werkgroep is er echter nog niet in geslaagd docenten te vinden die het voortouw willen nemen bij de start van een regionale gespreksgroep. Het bestuur doet daarom een oproep aan alle docenten die geïnteresseerd zijn in een regionale werkgroep om niet te wachten tot een initiatiefnemer zich

meldt, maar zelf in contact te treden met de werkgroep.

Nu dit jaar de 'Werkgroep Vrouwen en Wiskunde' vijf jaar bestaat, mag deze groep wel eens wat uitgebreider genoemd worden.
In de afgelopen jaren heeft de werkgroep veel activiteiten ontplooid. Twee maal per jaar wordt er een landelijke bijeenkomst gehouden. Het boek VrouWiskundig wordt inmiddels op vele plaatsen in de wiskundewereld aangehaald. Dit jaar werd er voor de NLO docenten een nascholing georganiseerd. Inmiddels is een start gemaakt met een documentatiecentrum. De werkgroep gaat haar lustrum vieren in het voorjaar van 1987 door de organisatie van een grote bijeenkomst voor vrouwen met als onderwerp 'Het beeld van de wiskunde'; daartoe worden nu leerstofpakketjes gemaakt. Wij wensen de werkgroep een succesvol lustrum toe.
Ook willen wij even stilstaan bij een inmiddels zelfstandig geworden werkgroep 'Vrouwen en Informatica'. Dit jaar opende de stichting Vrouwen en Informatica, voortgekomen uit de werkgroep Vrouwen en Wiskunde, een landelijk centrum. Het doel van de stichting is meer vrouwen te betrekken bij informatica en de vrouwen die reeds in de informatica werken 'zichtbaar' te maken. Van de vele activiteiten van deze stichting noemen wij: landelijke bijeenkomsten, cursussen, de video-film 'Het zit in de computer' en in november een onderwijscongres.

Een jaarrede zou niet af zijn als niet uw aandacht voor het tijdschrift Pythagoras zou worden gevraagd. Dit tijdschrift bestaat reeds 25 jaar en gaat dit jaar de 26e jaargang in. Het biedt de leerlingen de gelegenheid om eens op een andere manier kennis van wiskunde te nemen dan in de klas. Wij hopen dat onder andere door uw propaganda voor dit tijdschrift in de les Pythagoras nog een lang en bloeiend bestaan zal leiden.

Behalve voor Pythagoras vragen wij ook uw aandacht voor de jaarlijkse gemeenschappelijke studiedag van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Deze studiedagen bestaan uit enige voordrachten van Vlaamse en Nederlandse sprekers, zodat u ook kunt kennismaken met de wiskunde in Vlaanderen, maar ook is er op deze studiedagen ruimschoots gelegenheid met uw Vlaamse collega's van gedachten te wisselen.
Ofschoon de kwantiteit van het aantal aanwezigen het afgelopen jaar voor beide besturen reden was zich te bezinnen op het doorgaan met deze studiedagen, heeft toch de kwaliteit van het gebodene de doorslag gegeven om met de studiedagen door te gaan.
Het komend jaar zullen wij weer te gast zijn in Vlaanderen. Zoals in de klas zou ik nu willen zeggen: Pak allemaal uw agenda en noteer voor zaterdag 28 maart 1987, gemeenschappelijke studiedag in Vlaanderen.
Hiermee verklaar ik deze jaarvergadering voor geopend.

Th. J. Korthagen, voorzitter

Notulen van de algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 25 oktober 1986 in het gebouw van de S.O.L. te Utrecht.

Om 10.08 uur opent de voorzitter, dr. Th. J. Korthagen, de vergadering. Hij heet in het bijzonder welkom de ereleden prof. dr. H. Freudenthal en dr. P. G. J. Vredenduin, de inspecteurs J. Boersma en drs. B. J. Westerhof, de vertegenwoordiger van de NVORWO de heer H. Heidenrijk, de vertegenwoordiger van de NVON de heer P. Hillebrink, de vertegenwoordiger van de SLO de heer P. Verstappen, de vertegenwoordigers van Euclides de heren prof. dr. F. Goffree en drs. A. Oosten en de vertegenwoordigers van de Vlaamse Vereniging voor Wiskundeleraars mevrouw L. Simons en de heren F. Laforce en H. Staelens.
Hierna spreekt de voorzitter de jaarrede uit. Deze is in Euclides opgenomen. Na de jaarrede worden de notulen van de algemene vergadering van 26 oktober 1985 en de jaarverslagen goedgekeurd. Het

verslag van de kascommissie wordt voorgelezen en hierna wordt de penningmeester gedéchargeerd. Vervolgens worden in de nieuwe kascommissie gekozen mevrouw N. B. Sies en de heer L. A. G. M. Muskens.
Vervolgens vindt de bestuursverkiezing plaats. Van de aftredende bestuursleden zijn dr. J. van Dormolen en mevr. drs. N. C. Verhoef niet herkiesbaar. Daar er geen tegenkandidaten zijn ingediend zijn de heren C. Th. J. Hoogsteder, M. Kindt en F. J. Mahieu herkozen en zijn als nieuwe bestuursleden gekozen mevr. A. F. S. Aukema-Schepel en de heer L. Jacobs.
De contributie voor het jaar 1987/1988 wordt vastgesteld op *f* 55,–. De voorzitter stelt nu de voorgestelde statutenwijziging aan de orde. Hij licht toe dat volgens de huidige statuten tot veertien dagen voor de vergadering tegenkandidaten voor het bestuur kunnen worden ingediend en dat het bestuur dan volgens het huishoudelijk reglement de leden hiervan uiterlijk één week voor de ledenvergadering op de hoogte moet stellen. Dit kan financiële consequenties hebben van circa *f* 8000,–. Daarom heeft het bestuur voorgesteld de tijd voor het indienen van tegenkandidaten te koppelen aan de ontvangst van de oproep voor de jaarvergadering. Een groep leden uit Groningen en omgeving vindt de termijn van veertien dagen voor het indienen van tegenkandidaten te kort en stelde in een brief aan het bestuur voor om òf de verplichting tot mededeling aan de leden vóór de vergadering te laten vallen, òf tegenkandidaten te laten indienen tot veertien dagen na de tweede convocatie en dan eventueel mededeling aan de leden te doen door middel van een inlegvel in Euclides. De voorzitter zegt dat het bestuur tegen beide alternatieven bezwaren heeft maar door een gewijzigd voorstel – zoals in Euclides is opgenomen – aan de wensen van de Groningse leden heeft willen voldoen.
De heer H. Broekman vraagt of er nu geen problemen komen met de verplichting dat de oproep voor de ledenvergadering ten minste vier weken voor de vergadering wordt gedaan.
De voorzitter zegt dat ook dit in de voorgestelde statutenwijziging wordt geregeld door van de vier weken acht weken te maken. Hierna gaat de vergadering accoord met de volgende statutenwijziging:
Statuten artikel 8 lid 2:
'Tot veertien dagen voor' wijzigen in 'Tot achtentwintig dagen na het verschijnen van de eerste oproep voor'.
Statuten artikel 10 lid 1:
'Ten minste vier weken' wijzigen in 'Ten minste acht weken'.
Huishoudelijk reglement artikel 5:
'Binnen veertien dagen na de oproeping' wijzigen in 'Binnen achtentwintig dagen na de eerste oproeping'.

De vergadering machtigt voorzitter en secretaris deze wijzigingen door een notaris te laten aanbrengen.
Van de Groningse leden ligt er ook nog een voorstel tot wijziging van de eerste twee zinnen van artikel 8, lid 3 van de statuten in 'Bestuursleden worden gekozen voor een termijn van maximaal drie jaar. Een aftredend bestuurslid is herkiesbaar tenzij dit bestuurslid reeds gedurende tien jaar zitting heeft gehad in het bestuur'. De voorzitter citeert hierbij uit de aan het bestuur gerichte brief van de Groningse leden, waarbij hij vermeldt dat men voor de huidige bestuursleden een overgangsregeling wil. Volgens de voorzitter wijst het bestuur dit voorstel af. Het bestuur vindt het minimaal nodig dat een ontsnappingsclausule wordt ingebouwd en dit blijkt niet mogelijk te zijn. Hij zegt toe dat het bestuur er naar zal streven dat er gemiddeld één bestuurslid per jaar door een nieuw bestuurslid zal worden vervangen. Bij handopsteken blijkt dat er 37 leden vóór en 45 leden tegen wijziging van artikel 8, lid 3 van de statuten zijn.
De heer A. Oosten vraagt hoeveel leden er aanwezig zijn. Volgens de vooritter is deze vraag niet meer van belang daar volgens de statuten voor een wijziging van de statuten tenminste tweederde van de geldig uitgebrachte stemmen vóór de wijziging moeten zijn en hieraan toch niet meer voldaan kan worden.
Als laatste punt van het morgengedeelte van de jaarvergadering neemt de voorzitter afscheid van de vertrekkende bestuursleden.
Allereerst richt de voorzitter zich tot mevr. drs. N. C. Verhoef. De wens van mevrouw Verhoef om het bestuur te verlaten heeft niet alleen begrip, maar ook gevoelens van spijt opgeroepen. Niet alleen het feit dat mevrouw Verhoef de eerste vrouw in het bestuur was is de reden dat zij een bijzondere plaats in het bestuur innam, maar voor-

al haar grote inzet voor de vereniging, de nauwgezetheid waarmee ze haar taken uitvoerde, de mildheid van haar oordeel en de speciale sfeer die zij de vergadering wist te geven. De voorzitter dankt haar voor alles wat zij voor de vereniging heeft gedaan.
Vervolgens stelt de voorzitter aan de vergadering voor om dr. J. van Dormolen voor de vele verdiensten die hij het wiskundeonderwijs bewezen heeft te benoemen tot erelid van de vereniging. De vergadering gaat hiermee eenstemmig accoord.
Nadat de heer Van Dormolen, die eerder door de penningmeester op tactische wijze de zaal was uitgelokt, de zaal weer is binnengekomen, richt de voorzitter zich tot de heer Van Dormolen. Hij zegt dat de vergadering de heer Van Dormolen het erelidmaatschap aanbiedt met de volgende motivering: Hij was van 1955 tot 1972 wiskundeleraar bij het V.H.M.O., respectievelijk havo/vwo en sinds 1968 wetenschappelijk hoofdmedewerker voor de didactiek van de wiskunde aan de Rijks Universiteit te Utrecht.
Sinds 1964 was hij bestuurslid van de vereniging en van 1964 tot 1981 was hij penningmeester en verzorgde hij de ledenadministratie.
Hiernaast is hij binnen de vereniging zeer actief, onder andere voor de didactiekcommissie, waarvan hij de oprichter, de voorzitter en de stuwende kracht is.
Bij de totstandkoming van het vak wiskunde I voor het vwo heeft hij meegewerkt aan de totstandkoming van het leerplan voor analyse.
Hij werkte mede in de commissies van de vereniging die vraagstukkenbundels opstelde voor wiskunde I en II en voor wiskunde A en B.
Hij was lid van de werkgroep van advies voor de Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde I en II en van de werkgroep ter voorbereiding van Wijziging van het eindexamenprogramma wiskunde havo en is lid van de Hewet-begeleidingscommissie.
Hij heeft diverse leerboeken geschreven, waaronder Analyse 1 en 2, Algebra 1 en 2 en hij verzorgde een Nederlandse bewerking van het boek 'First Concepts of Topology' van Chinn en Steenrod. Hij werkt nu aan de leergang 'Exact Wiskunde'. Hij schreef het veel bestudeerde boek 'Didactiek van de Wiskunde' en als proefschrift 'Aandachtspunten'.
Voor de vereniging verzorgde hij – onder andere in samenwerking met de didactiekcommissie – vele publikaties. Ook is hij redacteur van het 'Tijdschrift voor de didactiek van de ß-wetenschappen!
Al deze activiteiten komen voort uit zijn voortdurende streven te komen tot een beter wiskundeonderwijs.
Op de vraag van de voorzitter of hij het erelidmaatschap aanvaardt, antwoordt de heer Van Dormolen dat hij dit gaarne doet.
Hierna is het eerste deel van de jaarvergadering gesloten en krijgt de heer S. Kemme het woord om uiteen te zetten hoe het gedeelte 'studiedag' zal verlopen.
Na het gedeelte 'studiedag' heropent de voorzitter om 16.55 uur het huishoudelijk gedeelte van de jaarvergadering voor de rondvraag.
Als eerste stelt de voorzitter de nieuwgekozen bestuursleden aan de vergadering voor.
Hierna is het woord aan de heer K. L. Wijnia. Deze merkt op dat het schrijven van de inspectie over de soorten grafiekenpapier op de scholen verwarring sticht en vraagt waarom niet net als bij natuurkunde en scheikunde het grafiekenpapier bij de opgaven verstrekt wordt. De heer H. N. Schuring zegt hierop dat er bij wiskunde A veel soorten grafiekenpapier gebruikt worden en dat daarom de inspectie voorschriften betreffende de formaten heeft gegeven. De examens zullen hieraan worden aangepast. De redenen van het niet meezenden van grafiekenpapier bij de opgaven zijn dat de staatsdrukkerij reeds overbelast is en dat ook bij het werken met inlegvellen fouten gemaakt kunnen worden. Ook in de lessen heeft men de diverse soorten grafiekenpapier nodig, zodat de school ze toch moet aanschaf-

De redactie van Euclides feliciteert Joop van Dormolen van harte met de benoeming tot erelid van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

fen. De heer Wijnia vindt het erg duur om alle papier op het eindexamen aan de leerlingen te verstrekken, terwijl ook niet bij de aanvang van het examen de wiskundeleraar even kan komen kijken welk papier moet worden uitgedeeld. De heer Schuring laat hierop weten dat er contacten van de inspectie met drukkers zijn. De commercie zal uitwijzen wat er uiteindelijk op de markt komt. Er is reeds een firma die naar de scholen een aankondiging van haar papier heeft gezonden, terwijl ook een andere firma nog onderzoek doet.
De heer J. B. v.d. Groep geeft uiting, naar hij meent namens velen, aan de irritatie door het lawaai en rumoer van de commerciële uitgevers die te dicht bij de vergaderzaal aanwezig waren. Dit leidde tot gebrek aan concentratie. De heer F. F. J. Gaillard geeft de heer V.d. Groep gelijk. De organisatoren zagen dit aankomen. Het was toen echter te laat om nog maatregelen te nemen. Hij is blij met het grote aantal aanwezigen, maar hierdoor moest men wat inschikken. De heer W. H. Doekes heeft dezelfde opmerking over het forum, waarbij men gestoord werd door andere groepen binnen het gebouw. Volgens de heer Gaillard was dit wederzijds; de andere groepen werden ook door ons gestoord. De heer J. J. Sloff vond ook dat andere groepen erg storend werkten.
Vervolgens is het woord aan mevrouw C. M. Tessel. Zij vraagt aandacht voor de verandering in het eindexamen mavo/lbo. Er komen steeds meer meerkeuzevragen. Nu is het reeds 70%; gaat dit naar 100%? Haar sectie heeft aan de Staatssecretaris een brief geschreven die zij nu voorleest. Deze brief is als bijlage opgenomen. Zij vraagt anderen om eventueel ook een brief met eigen ideeën te zenden. De vraag van mevrouw Tessel wordt door de vergadering met applaus ondersteund. De heer F. J. Mahieu zegt dat de zeer kernachtige brief aan de Staatssecretaris in het bestuur is besproken. Ook het bestuur heeft een brief aan de Staatssecretaris geschreven en deelt de mening van mevrouw Tessel, zoals ook uit de jaarrede van de voorzitter blijkt. De CEVO poogt er binnen de regels het beste van te maken. Motivering blijft, volgens de heer Mahieu, van wezenlijk belang bij wiskunde en motivering mist men bij meerkeuzevragen. Het bestuur beraadt zich er over wat er verder gedaan kan worden en zal contact met andere verenigingen zoeken. Het bestuur denkt aan een enquête of een bijeenkomst om de mening van de leden te peilen. De heer Mahieu vraagt wat men vindt van het voorbeeldexamen. Hij beluistert steeds meer kritische bezwaren. Hij vraagt om schriftelijke reacties, die het bestuur eventueel kan bundelen en kan gebruiken als onderstreping van de bezwaren in een nieuwe brief aan de Staatssecretaris. De heer H. Broekman constateert dat aftreden soms een methode is om aandacht te krijgen. Hij vraagt in hoeverre het verantwoord is dat de vereniging mensen afvaardigt naar commissies die een beleid uitvoeren waar men tegen is.
De heer J. van Dormolen feliciteert de organisatoren van de dag met het succes en hoopt dat vele aanwezige niet-leden lid zullen worden van de vereniging. Hij doet de suggestie dat het bestuur in Euclides een kroniek opent waarin bestuursleden iets vertellen over wat zich binnen de wiskundewereld afspeelt.
Mevrouw L. Simons brengt een groet uit Vlaanderen, wenst de vereniging het komend jaar veel succes en dankt voor de gastvrijheid.
De voorzitter dankt tenslotte alle organisatoren van deze dag, wenst alle aanwezigen wel thuis en sluit om 17.15 uur de vergadering.

Aan de Staatssecretaris drs. N. J. Ginjaar-Maas

Geachte mevrouw,

De sectie wiskunde van het Hervormd Lyceum West te Amsterdam wil d.m.v. deze brief haar bezorgdheid uitspreken betreffende de veranderingen in het examenprogramma voor de mavo en het lbo.
De nadruk wordt steeds meer gelegd op meerkeuzevraagstukken en dat is sterk demotiverend voor deze groep leerlingen.
De praktijk leert dat de leerling een goede wiskundehouding is aan te leren wanneer ze bezig zijn met open vraagstukken. Ze ervaren het als positief om de sommen te onderzoeken en naar een oplossing toe te werken.

Zo gauw ze geconfronteerd worden met meerkeu-

zevraagstukken, laten ze hun onderzoekende houding varen en lossen deze vraagstukken op alsof het raadseltjes zijn. Ze vinden het al snel vervelend om te doen en ervaren het als bijzonder negatief dat door één rekenfoutje de hele som fout is. (Bij open vraagstukken hoeft dat niet zo te zijn.)

Omdat je als docent de leerling zo goed mogelijk wil voorbereiden moet je ze laten wennen aan dit type vraagstuk. Dit betekent dat je een groot gedeelte van de lessen hier mee bezig bent, wat de motivatie voor het vak wiskunde vermindert. Tevens zal de aansluiting met wiskunde van vervolgopleidingen moeilijker worden, de ervaring met open vraagstukken is veel minder.
In afwachting van antwoord, verblijven wij, hoogachtend, de sectie wiskunde.

Amsterdam, 18 oktober 1986.

Oproep aan de leden van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Op de jaarvergadering van 25 oktober 1986 stelde mevrouw C. M. Tessel de verandering in het eindexamen wiskunde voor mavo en lbo aan de orde. Zij uitte hierbij haar bezwaren tegen de grote invloed van de meerkeuzevragen op het eindexamen en las een brief voor die de sectie wiskunde van het Hervormd Lyceum West te Amsterdam hierover aan de Staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen heeft geschreven.
De discussie hierover kunt u vinden in de notulen van de jaarvergadering. De brief is hierboven afgedrukt.

Op 4 mei 1984 hebben de besturen van de Nederlandse Vereniging voor het Onderwijs in de Natuurwetenschappen en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren over dit onderwerp reeds een brief aan de Staatssecretaris geschreven waarin ook zij de bezwaren tegen een examen bestaande uit meerkeuzevragen kenbaar maakten. Deze brief is opgenomen in Euclides 60,7 van maart 1985, pag. 273 en 274.

Het bestuur wil graag blijven proberen de invloed van de meerkeuzevragen op het eindexamen te verkleinen. Daarom doet het bestuur een beroep op alle leden om hun mening over de wijzigingen in de examens 1987, zoals die in de brief van de CEVO van augustus 1986, kenmerk CEVO 86-87-12, aan de vakdocenten wiskunde voor lbo en mavo is meegedeeld, te laten weten. Uw mening wordt graag ingewacht bij de secretaris, drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Voor een goed bestuursbeleid hopen wij op veel reacties.
Namens het bestuur van de NVvW, J. Maassen, secretaris.

Mededeling

Eindexamen wiskunde A en wiskunde B

In Euclides nr. 3 van november 1986 bood het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren aan de leden de gelegenheid over het eindexamenprogramma wiskunde A en wiskunde B vwo vragen in te zenden. De vragen zijn geïnventariseerd en aan inspectie, CEVO en het Hewet-team voorgelegd. De antwoorden kunnen als volgt worden samengevat.

Wiskunde B

1. Ruimtemeetkunde.

- Op de eindexamens 1987 en 1988 zullen geen vragen worden gesteld over cilinder en kegel.
- Niet tot het examenprogramma behoren: cilinder- en kegelsneden, dit houdt niet in dat de te onderzoeken kromme in de analyse nooit een kegelsnede mag zijn, pool-, cirkel- en bolcoördinaten, afstandsbepaling van punten tot ruimtekrommen, ruimtekrommen op de bol, bissectricevlakken.
- Ofschoon kegelsneden, en dus ook paraboloides en hyperboloides, niet tot het programma behoren, behoren omwentelingslichamen en inhouden wel tot het programma. Niet alleen bij de meetkunde, maar ook bij de analyse worden inhoudsberekeningen genoemd.
- Het inwendig product behoort wel tot het examenprogramma.
- Het is bij dit alles niet de bedoeling dat een vraagstukkencultuur los van ruimtelijk inzicht ontstaat.

2 Differentiaalvergelijkingen

Op de eindexamens 1987 en 1988 zullen geen vragen gesteld worden over differentiaalvergelijkingen. De reden hiervan is dat de noodzakelijke omschakeling van de docenten deze jaren tot gevolg kan hebben dat aan de voorbereiding van de leerlingen op alle examenonderwerpen onvoldoende aandacht kan worden besteed. Het onderzoek van een kromme gedefinieerd door een vergelijking moet vaak met een differentiaalvergelijking geschieden. Dit kan in 1987 en 1988 wel op het examen gevraagd worden. Vragen naar punten met bijvoorbeeld raaklijnen evenwijdig aan de x- of y-as kunnen dus voorkomen.

Binnenkort zal een werkgroep van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren zich gaan bezinnen op de interpretatie van het onderwerp differentiaalvergelijkingen; mogelijk zal dit in de toekomst invloed hebben op de aard van de vraagstukken met differentiaalvergelijkingen.

Wiskunde A

1. Toegepaste analyse

De tweede afgeleide en buigpunten behoren niet tot het examenprogramma. Dit houdt niet in dat de afgeleide van een afgeleide functie nooit aan de orde mag komen.

2. Toegepaste algebra

Het zoeken van functievoorschriften bij functies van twee variabelen en het 'onderzoek' van functies van twee variabelen (bijvoorbeeld met partiële afgeleiden) behoren niet tot het programma.

3. Waarschijnlijkheidsrekening

- Voorwaardelijke kans, onafhankelijkheid en betrouwbaarheidsinterval zullen in het definitieve eindexamenprogramma voor wiskunde A vwo niet meer voorkomen. Onafhankelijke en afhankelijke kansen komen dus niet voor in eindexamenvraagstukken, maar in de lessen moeten deze begrippen wel ter sprake komen, mede om straks met vrucht het keuzeonderwerp 'correlatie' te kunnen behandelen.
- Het gebruik van normaalwaarschijnlijkheidspapier behoort wel tot het programma.
- Op het eindexamen zullen geen symbolische notaties, zoals $E(X)$, μ, $SD(X)$, σ en dergelijke gebruikt worden. De begrippen verwachtingswaarde, gemiddelde, standaarddeviatie en dergelijke zullen bij hun naam worden genoemd.
- Continuïteitscorrectie
  Als vuistregel kan worden aangehouden dat deze moet worden toegepast indien sprake is van een indeling in klassen of bij een benadering van de binomiale verdeling door de normale verdeling.
  Indien bijvoorbeeld sprake is van komkommers met een gemiddelde lengte van 50 cm en een standaarddeviatie van 7 cm dan wordt geen continuïteitscorrectie toegepast als er geen verdere gegevens verstrekt worden, maar wel als er sprake is van een verdeling in diverse prijsklassen, waarbij bijvoorbeeld 54 cm staat voor 52 t/m 56 cm. Ook bij vraagstukken met aantallen, zoals aantallen bonbons in een doos, moet met een continuïteitscorrectie worden gewerkt. Bij de binomiale verdeling is de vraag of de continuïteitscorrectie moet worden toegepast zowel afhankelijk van n als van p. Het is het eenvoudigst om de correctie altijd toe te passen.
- Het is wel noodzakelijk dat de kandidaten begrip hebben van de onnauwkeurigheid van de waarnemingswaarden en de getallen in de tabellen.
- Bij het gebruik van de tabel voor de cumulatieve normale verdeling is het niet vereist dat de kandidaten gebruik maken van interpolatie.

Algemeen

Dat bepaalde onderdelen niet tot de examenstof behoren houdt niet in dat ze in geen enkel geval in het examen voor mogen komen. Het betekent wel dat bij de kandidaten geen voorkennis over deze onderwerpen wordt verwacht. Ofschoon de kandidaat geen functievoorschriften bij functies van twee variabelen behoeft te kunnen opstellen betekent dit niet dat dit niet in eenvoudige gevallen wel mag, zoals bijvoorbeeld bij een hoogtekaartje met rechte lijnen als hoogtelijnen of bij lineair programmeren. Dat onderwerpen in leerboeken voorkomen houdt nog niet in dat ze ook tot het examenprogramma behoren. Ook vroeger gaven de meeste leerboeken meer dan de minimum examenstof.

De concepteindexamenprogramma's voor wiskunde A en wiskunde B zijn te vinden in circulaire VO/AV 84-02 en in de bundels 'Opgaven Wiskunde A Vwo' en 'Opgaven Wiskunde B Vwo' van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. In de examens van 1987 en 1988 worden geen vragen gesteld over differentiaalvergelijkingen, lijnelementenveld, oplossen van eenvoudige differentiaalvergelijkingen, cilinder en kegel en een keuze-onderwerp bij wiskunde A. Voor de examens wiskunde A in 1989, 1990 en 1991 is het keuze-onderwerp 'Statistiek'.

J. Maassen

Van Rekenen (op je 10de) naar Wiskunde (op je 16de)

Fred Goffree, Jos ter Pelle

1 Doorgaande lijnen

Het vak rekenen heet sinds de nieuwe basisschool rekenen en wiskunde. Dat betekent niet dat er nu twee vakken gegeven worden, maar dat men rekenonderwijs moet zien als een onderdeel van wiskundeonderwijs. Die gedachte is niet van de laatste twee jaar. Ook al eerder kon men doorgaande lijnen in de leerstof van lager- en voortgezet onderwijs herkennen. Om er een paar te noemen:

* van verhoudingen naar lineaire functies;
* van ruimtelijke oriëntatie naar meetkunde;
* van breuken naar rationale getallen;
* van rekenen naar eigenschapsrekenen naar letterrekenen.

Oppervlakkig zou men nu kunnen denken aan die deelleergangen, beginnend in de basisschool, die via voortdurende uitbreiding en complicering van de leerstof tenslotte uitmonden in het voortgezet onderwijs. Dat is oppervlakkig gezien omdat daarmee voorbijgegaan wordt aan een ingrijpende verandering, die eerder de wiskundige activiteit van de lerenden dan de leerstof zelf betreft. In dit artikel willen we aandacht besteden aan die verandering. Omdat het bij 'rekenen' over getallen gaat en omdat in de brugklas getallen al gauw vanuit meer wiskundig standpunt worden beschouwd, plaatsen we een en ander tegen de achtergrond van het getalbegrip. We zullen bij de bestudering van de ontwikkeling van het getalbegrip bijzonder op onze hoede zijn als de negatieve getallen in zicht komen. Dat zowel in de basisschool als in de brugklas aan het verwerven van getalbegrip wordt gedaan, staat als een paal boven water. In hoeverre het werk in de

basisschool verschilt van dat in het voortgezet onderwijs, is niet altijd even duidelijk. Zeker niet als men in het voortgezet onderwijs genoodzaakt is bestaande lacunes in rekenvaardigheid of rekeninzicht weg te werken. Bijspijkeren, noemt men dat. Overigens geldt hetzelfde als men zich bezighoudt met het 'warmhouden' van wel beschikbare kennis en vaardigheid.
Veel interessanter is evenwel de vraag in hoeverre het basisonderwijs anticipeert op het werken met getalverzamelingen en het uitbreiden daarvan. In dat geval gaat het om anticiperen op iets nieuws, namelijk een wiskundige beschouwing over getallen. Weten we iets van het anticiperen (dat al dan niet bewust, door leraar of leerling is gebeurd), dan is het interessant om na te gaan of, en in hoeverre in het wiskundeonderwijs van de brugklas teruggegrepen wordt op hetgeen er in de basisschool geleerd is. En natuurlijk niet alleen wat betreft de stof, maar ook de wijze waarop kinderen de stof onderwezen is en hoe zij een en ander zelf verworven hebben.

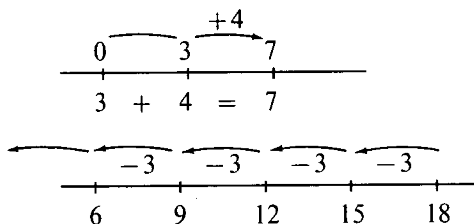
Hoe zit dat anticiperen en teruggrijpen eigenlijk in elkaar. Laten we nu even voorbijgaan aan de reeds genoemde gevallen van het verwerven van rekenvaardigheid en het bijspijkeren, als het nog niet helemaal gelukt is. Nee, we willen het hebben over het getal. Inzicht in getallen, wat dat zijn, wat je ermee kunt doen, hoe je je er iets bij kunt voorstellen, hoe je ermee kunt rekenen, welke wetmatigheden dan optreden, hoe je die kunt begrijpen en ook: hóé je die kunt begrijpen (moet je commutativiteit opvatten als 'natuurwet', als 'axioma' of als 'stelling'?).

We zouden willen weten hoe het komt dat kinderen in de brugklas (en hoger!) fouten maken als '-4 is groter dan -1'. En hoe het komt dat in een recent onderzoek bijvoorbeeld 61% van de kinderen $(-7) + (-5)$ goed uitrekenen en slechts 17% $8 - (-3)$. We zouden ook willen weten hoe kinderen tot goede antwoorden komen en hoe het 'rekenwerk' van vroeger daarbij van invloed is. Neem de twee strategieën voor $(-12) - (-4) = (-8)$

1 Je hebt 12 minnen, daar haal je 4 minnen vanaf en je houdt over 8 minnen.
2 $12 - 4 = 8$, dus $(-12) - (-4) = -8$.

We zouden trouwens ook willen weten waarom onze didactische inspanningen, om zaken concreet, aanschouwelijk of plausibel te maken, nu eens wel en dan weer niet goed tot resultaat leiden.

We spraken over anticiperen en teruggrijpen. Laten we een zeer voor de hand liggend onderdeeltje ter illustratie kiezen.
Kinderen in de basisschool werken met de getallenlijn en geven in termen van stappen (als bogen getekend) optellen, aftrekken en zelfs vermenigvuldigen en delen aan.



Tel met 3 terug vanaf 18, of:
hoeveel keer gaat 3 in 18, of:
hoeveel is 18 : 3?

Met dit soort activiteiten wordt geanticipeerd op de introductie van negatieve getallen. De collega in de brugklas bouwt hierop idealiter voort. Wellicht worden de sprongetjes vectoren en waarschijnlijk beperkt hij zich tot optellen en vermenigvuldigen als herhaald optellen.

Nu is er natuurlijk wel een verschil tussen de leerling van groep 5 die de getallenlijn gebruikt om het rekenen te ondersteunen en de brugklasser die de getallenlijn dáárvoor niet nodig heeft. Waarvoor dan wèl? Eigenlijk moet hij $5 - 3 =$ op de getallenlijn zetten, om via het meetkundig model van $(\mathbb{N}, +)$ straks $\ulcorner \mathbb{Z}, + \urcorner$ te leren kennen. Na $5 - 3 =$ komt namelijk een opgave als $5 - 6 =$ en de uitkomst -1 moet vooral als nieuw getal, één plaats voor de nul, begrepen worden. Daarbij behoort het inzicht dat ook $8 - 9$, $7 - 8$, $6 - 7$, $4 - 5$, $3 - 4$, $2 - 3$, $1 - 2$, $0 - 1$ datzelfde getal -1 representeren. En dat is meer dan het kunnen uitrekenen van $5 - 6 = -1$!

Hier ziet u dat anticiperen niet hetzelfde is als volledig voorbereiden. De getallenlijn heeft in het basisonderwijs veelal slechts instrumentele aandacht gekregen. Dat wil zeggen het was een ondersteuning van het rekenen. In de brugklas wordt meer gevraagd. De getallenlijn staat model voor getallen (oude en nieuwe) en enkele operaties kun je zichtbaar maken. Dat de getallenlijn ook in de brugklas instrumenteel gebruikt wordt (hoe zat dat ook weer, $-3 - 5 = ?$), is geen bezwaar. Brugklassers kunnen langzamerhand de getallenlijn voor $\ulcorner \mathbb{Z}, + \urcorner$ mentaal gebruiken. (Je ziet ze dan met hun vinger langs een onzichtbare getallenlijn gaan.) Als het echter bij het instrumentele blijft is de wiskunde in het voortgezet onderwijs niets meer dan het rekenen in het basisonderwijs.
Toch is wiskunde méér dan rekenen. In het geval van de getallen komt het neer op afstand nemen. Rekenen is je *in* de getallenwereld begeven, vrienden en bekenden maken, relaties zien en gebruiken... een materieel wereldje dus.
Wiskunde vraagt van je om even uit dat materiële wereldje te treden, enige afstand te nemen en het totaal gebeuren in je op te nemen. Je ziet dan de grotere verbanden, fundamentele wetmatigheden en structuren, overeenkomsten en verschillen tussen oud en nieuw. Door erbuiten te gaan, kun je, niet gehinderd door energievretende en tijdverslindende opgaven, de rust en tijd nemen om je wat formeler op te stellen. Het rekensysteem kan dan eens op zijn meritis bekeken worden, zonder direct aan toepasbaarheid of realiteitswaarde te denken.

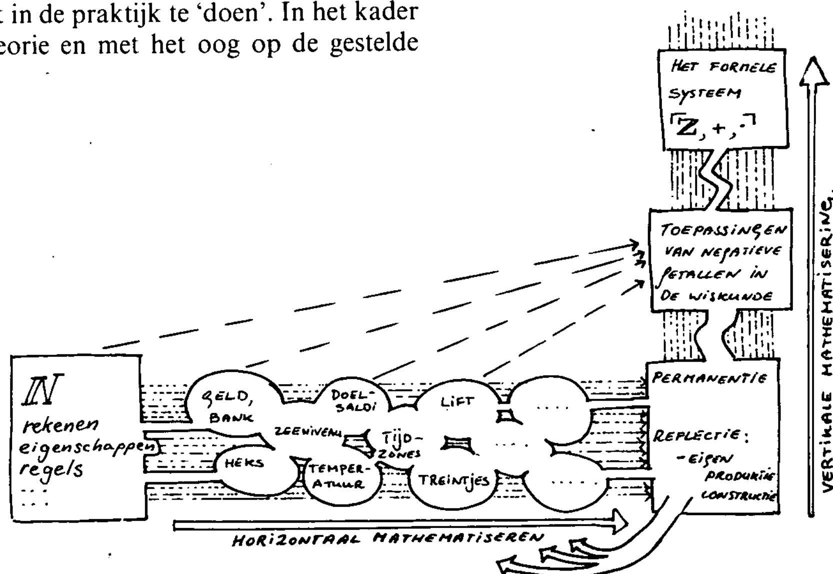
Op dit laatste (afstand nemen, reflecteren, een formeel standpunt innemen) wordt niet geanticipeerd in het basisonderwijs.
Dat betekent een eigen didactische opgave voor de onderbouw wiskunde. De ingrijpende verandering, waarop we eerder doelden, zal hier dus plaats moeten vinden. Om de overgang soepel te doen verlopen kiest men aanvankelijk voor de basisschoolbenadering. De negatieve getallen worden verkend in niet-wiskundige contexten, denkmodellen ter ondersteuning van het eenvoudige rekenwerk worden aangeboden en de getallen worden lokaal bekeken. Van deze instap is een nieuwe invulling gemaakt, waarvan we verwachten dat het een goede voorbereiding is voor het innemen van een wat formeler standpunt in een latere fase. Een standpunt van waaruit kenniselementen van het getalsysteem $\ulcorner \mathbb{Z}, + \urcorner$ als zodanig bereikbaar worden, hopen we. Op welke overwegingen deze hoop en verwachting gebaseerd zijn, willen we nu uiteenzetten.

2 Over de streep, onder nul

De ontwerper van experimenteel materiaal voor het wiskundeonderwijs na de basisschool ziet zich geplaatst voor het probleem van de doorgaande lijnen, zoals dat hierboven geschetst is. Kort samengevat komt het erop neer dat men de leerstof niet bij AF *behoeft* te beginnen, dat men de didactische aanpak van de basisschool niet *kan* negeren en dat men voort *moet* bouwen op reeds in gang gezette leerprocessen. Een dergelijk algemene beginselverklaring laat evenwel nog velerlei invullingen toe. Om nader te komen tot de specifieke overwegingen die hebben geleid tot het ontwerpen van zo'n invulling (eerste versie van het pakketje 'Onder Nul'), schetsen we nu kort een soort onderwijstheoretisch kader, waarin die overwegingen begrepen dienen te worden. Voor theoretisch geïnteresseerde lezers zij even opgemerkt dat Van Hiele's 'Niveautheorie', Freudenthal's 'Didactische Fenomenologie' en IOWO's 'Progressieve Mathematiseren' in dit kader verenigd zijn. Voor meer in het concrete materiaal geïnteresseerde lezers moeten we de achterliggende theorie toch eens kort aangeven.
Wiskunde, zo is de gedachte, leert men aanvankelijk (op het nulde niveau, als u wenst) aan 'wereldse zaken'. Getalbegrippen bijvoorbeeld verwerft een mens door het verkennen, organiseren en structureren van situaties waarin hoeveelheden en/of grootheden voorkomen. De wiskundige activiteit (structureren bijvoorbeeld) scherpt bestaande intuïtieve noties aan en maakt informele aanpakken het overdenken waard. Dit vindt plaats op het nulde niveau van denken, direct aan de concrete objecten en door middel van materiële handelingen.
Om evenwel tot formeler wiskunde te komen, moet tijd genomen worden voor het echte denkwerk. De activiteit wordt dan mentaal. Reflectie, denken over het denken bij het doen, is essentieel. Het vormt een onmisbaar middel om naar hogere denkniveaus te komen. Hier spelen niet meer de concrete

objecten of handelingen daarmee een rol, maar is het de wiskunde als formeel systeem die binnen bereik komt. Wat eerst horizontaal mathematiseren was (van situatie naar informele wiskunde) wordt dan vertikaal mathematiseren. (Van informele naar formele wiskunde.)
In de onderstaande afbeelding is dit theoretische kader geschematiseerd.

Met deze theorie van het wiskundeonderwijs op de achtergrond wordt een alom bekend ontwerpprobleem nog duidelijker. Dit betreft de te stellen eindtermen. Wie 'Wiskunde voor Allen' ontwikkelt, mag – dat heeft de ervaring tot nu toe uitgewezen – zijn eindtermen niet bij het formele systeem leggen. Moet in dat geval de hele leergang 'Negatieve Getallen' dan weggelaten worden uit het onderbouwprogramma? Nee, zo menen wij, het is de fase van het horizontaal mathematiseren, die op zichzelf waardevolle leermomenten biedt. En wie tot en met de eenvoudige toepassingen van negatieve getallen in andere wiskundige en aanverwante leergebieden geraakt, wordt voorlopig in zijn/haar schoolloopbaan niet geblokkeerd.
Dit is allemaal eenvoudig gezegd. Maar de ontwerper wordt nu even wel voor de noodzaak geplaatst bij de keuze van situaties extra goed op te passen. Kunstmatige contexten als die van 'de heks' of 'treintjes', bedoeld om rekenregels plausibel (hanteerbaar?) te maken, komen niet in aanmerking, al blijken ze het in de praktijk te 'doen'. In het kader van onze theorie en met het oog op de gestelde eindterm zal er gezocht moeten worden naar reële contexten, eerst in de wereld van alledag (met temperatuur-, geld- tijd- en niveauverschillen), later wellicht in een reeds bekend, maar meer wiskundig wereldje (van roosters, tabellen en grafieken).
Bij het zoeken naar geschikte situaties voor het te ontwerpen leerpakket 'Onder Nul' werd het duidelijk dat er nog enige 'kleine' probleempjes opgelost moesten worden. Ook collega-leraren zullen die niet onbekend voorkomen. We sommen ze kort op:
* Doordat kinderen vaak in één wereldje rekenend al snel de zeer eenvoudige rekenregels doorkrijgen, is de rest van de leergang, (tot aan de wiskundige toepassingen) voor hen verloren. Ze kiezen als het ware een sluiproute naar het succes op het volgende proefwerk. Sommige situaties laten het volgen van een sluiproute méér toe dan andere. Het (didactisch onzinnige) omkeren van treintjes of mannetjes op een getallenlijn leidt al snel tot het kritiekloos toepassen van de onbegrepen regel 'twee minuten wordt een plus'.
* Elke situatie laat een beperkt gebruik van bewerkingen toe. In het geval van de thermometer kom je er bijvoorbeeld niet toe om twee negatieve getallen te gaan vermenigvuldigen. Op dat punt worden, didactisch gezien nogal eens consessies gedaan.
Dat geldt, zo dachten wij, niet voor de volgende situatie uit 'onder Nul':
'Ik weet dat mijn nichtje in New York om twee uur



thuis is. Hoe laat moet ik haar bellen?' Impliciet kan hier de berekening $2 - -6 = 8$ een rol spelen.

* De sterke kant van wiskunde is dat je er verschillende situaties mee kunt organiseren en structureren. Vandaar dat men bij negatieve getallen meer dan één situatie aanbiedt. De wiskundeleraar hoopt dan dat zijn leerlingen iets van de isomorfie zien. Didactisch spreekt men van veelzijdige inbedding, belangrijk voor het verwerven van wiskundige begrippen en structuren. Maar, zo wijst de praktijk nogal eens uit, kinderen zien de isomorfie niet. Wat te doen?
In 'Onder Nul' wordt geprobeerd dit tot stand te brengen door het stellen van vragen als:
Het huis uit Lelystad staat op de grond, die vier meter onder de zeespiegel ligt en 8,50 meter hoog. Je zou daarbij de som $-4 + 8{,}50 = 4{,}50$ kunnen bedenken.
Zeg eens met eigen woorden wat daar staat.

Wat zou er staan als de som over geld ging?
En over temperatuur?

* Al te eenvoudige situaties en zeer doorzichtige vraagstellingen geven in het algemeen een aanleiding tot reflectie. Daar dit laatste een onmisbaar onderdeel van het door ons voorgedachte leerproces is, dienden we op zoek te gaan naar complexe situaties. Ook dat nog.

Met bovenstaande overwegingen (sluiproutes blokkeren, geen concessies doen, isomorfie toegankelijk maken en complexiteit inbouwen) wordt de ruimte voor het ontwerpen behoorlijk verengd. Ontwerpers ervaren dit ook zo, vooral op momenten dat de creativiteit hen in de steek laat. Op andere ogenblikken geven de overwegingen richting aan het werk.
Met zo'n positieve ervaring willen we besluiten.

Het pakketje 'Onder Nul' gaat over de uitbreiding van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{Z}$. Hoe situatiegebonden de instap ook is, gelukkig bestaat er zoiets als het permanentieprincipe. Wetmatigheden die binnen het systeem $(\mathbb{N}, +, \bullet)$ bestaan, dienen in het omvattende systeem $(\mathbb{Z}, +, \bullet)$ ook nog aanwezig te zijn. Freudenthal vertaalde Hankel's 'permanentie van de formele regels' naar een meer didactisch bedoeld 'algebraïsch permanentie principe'. De Poolse didacticus Z. Semadeni deed iets dergelijks, maar dichter bij de concrete situaties waarin negatieve getallen geïntroduceerd worden. In onze Nederlandse schoolboeken zien we aanpakken, die enige verwantschap vertonen. Denk aan de voortzetting van rijtjes als

$6 - 4 = 2$
$6 - 5 = 1$
$6 - 6 = 0$
$6 - 7 =$

Of de meer meetkundige vertaling van dit principe, als grafieken van rechte lijnen in andere kwadranten dan het eerste worden voortgezet.
In 'Onder Nul' werd hier een nieuwe vorm aan toegevoegd; er wordt gebruik gemaakt van vuistregels, die in het ene domein hun geldigheid bewezen hebben en in het andere tot overpeinsing stemmen.
Een voorbeeld:
Hoe hoger je komt hoe kouder het wordt.
Denk maar aan de sneeuw op de bergen, zelfs in de zomer.
Er is een vuistregel die zegt: 'Bij iedere kilometer die je omhoog gaat, daalt de temperatuur 6 °C.

Op de grond is het 18 °C.
Hoe koud is het op 1 km hoogte volgens de vuistregel?
En op 4 km hoogte?
En op $6^1/_2$ km hoogte?
Vanaf welke hoogte gaat het vriezen?

Op een andere dag meet een ballonvaarder op 2500 m hoogte -2 °C.
Hoe warm is het op de grond?
De ballon kan temperatuur tot -10 °C verdragen.
Tot welke hoogte mag de ballonvaarder stijgen?

Op een andere dag is het op de grond 22 °C.
Vul de tabel verder in en maak een grafiek.

Tot zover enige overwegingen rond doorgaande lijnen van basisonderwijs naar voortgezet onderwijs, over negatieve getallen en het ontwerpen van een pakketje op dat gebied.
We zijn nog niet echt toegekomen aan 'wiskunde op je 16de'.
Misschien dat de praktijkervaringen met 'Onder Nul' daarop meer zicht zullen geven.

Mededelingen

Twaalfde gemeenschappelijke studiedag NVvW-VVWL

De twaalfde gemeenschappelijke studiedag met onze Vlaamse collega's zal plaats hebben op zaterdag 28 maart 1987 in Kapellen, gelegen tussen Bergen op Zoom en Antwerpen. Het thema van de dag is *Getallentheorie.* Plaats van samenkomst: Het Koninklijk Technisch Atheneum.

Programma:

10.00 uur Ontvangst van de gasten

10.30 Jan van Geel, hoogleraar van de RU Gent: *Getallen en Deeltermen*

11.45 Jack van Lint, hoogleraar universiteit Eindhoven: *Foutenverbetering op de Compact Disc.*
1. Inleiding, fouten verbeterende codes, Hamming afstand, lineaire codes
2. Een eenvoudig voorbeeld is de [7,4] Hamming code
3. Hoe goed kan een code zijn? (De Singleton grens)
4. Productcodes en samengestelde codes (gebruikt op de CD). Het principe van de foutenverbetering.

13.15 Lunch

15.00 Frank Laforce, oud voorzitter van de VVWL: *Variabelen op een thema: Permutaties*
Op de verzameling van de permutaties van n elementen, de cijfers 1,2,3,4,...,n, bepalen we deelverzamelingen door bepaalde voorwaarden te stellen waaraan de bedoelde permutaties moeten voldoen. Dit geeft aanleiding tot het opstellen van recursieformules die toelaten de kardinaal van deze deelverzamelingen te bepalen. De toepassingen geven een inzicht in het soms lastige probleem om het aantal te bepalen, ook bij eenvoudige opgaven.

De kosten van de lunch bedragen *f* 17,80 (3 gangen, wijn en koffie). Wilt u dit bedrag voor 9 maart aanstaande gireren aan de Nederlandse vereniging van Wiskundeleraren, girorekening 14397 t.n.v. de penningmeester te Amsterdam.
U kunt Kapellen bereiken via de snelweg Breda-Antwerpen, afslag Brasschaat, of via Bergen op Zoom-Putte (richting Antwerpen). Treinreizigers nemen de stoptrein Roozendaal-Antwerpen. Het Koninklijk Technisch Atheneum bevindt zich aan de Streepstraat.

Nederlands Wiskunde Olympiade 1987

De eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1987 zal plaatsvinden op vrijdag 20 maart 1987.
In maart ontvangen alle scholen voor VWO en HAVO een aantal exemplaren van het opgavenblad, een correctiesleutel en een resultatenformulier; gericht aan de wedstrijdleider van de Wiskunde Olympiade.
Ongeveer honderd deelnemers met de beste resultaten in deze eerste ronde worden uitgenodigd om deel te nemen aan de tweede ronde, die op vrijdag 11 september 1987 zal gehouden worden. Uit de tweede ronde zullen tien prijswinnaars komen, terwijl voor enkele deelnemers de mogelijkheid bestaat om mee te doen aan de Internationale Wiskunde Olympiade 1988.
H. N. Schuring, secretaris van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, p/a CITO, Postbus 1034, 6801 MG Arnhem.

Uitnodiging voor het MNU-congres in Keulen

De Duitse zustervereniging van de Nederlandse Vereniging van het Onderwijs in de Natuurwetenschappen (NVON) MNU houdt haar jaarlijkse congres in Keulen op *12 tot 16 april 1987.* MNU staat voor Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts. De MNU, zusterorganisatie van NVON en Lerarenvereniging wiskunde, heeft voor dit congres een nauwe samenwerking met de universiteit van Keulen.

Plaats: Universiteit van Keulen
Datum: dinsdag 14 april 1987
Vervoer: touringcar 'Vreugde Tours'
Vertrektijd: Nijmegen centraal station N.S. 08.35 uur; (aansluitende trein Amsterdam v. 6.33; Utrecht v. 7.17; Groningen v. 6.09; Leeuwarden v. 6.11 uur)
Aankomst universiteit: ca. 10.00 uur
Terug Nijmegen: ca. 22.15 uur (Utrecht 23.14; Amsterdam 23.44; Groningen 0.54 en Leeuwarden a 0.56 u.)
Vertrektijd Keulen: Restaurant Gürzenich 20.45 uur
Globaal programma voor natuurkunde, scheikunde, biologie, informatica en wiskunde:

ca. 10.00-11.00 koffie, bezoek tentoonstellingsruimten
11.00-17.45 lezingen van 45 minuten
13.00-17.00 excursiemogelijkheden
18.30 ontvangst buitenlandse gasten in Restaurant Gürzenich
19.00 avondmaaltijd
19.30 'geselliger Abend' in Gürzenich
20.45 vertrek met bus

Verplicht: paspoort en enig Duits geld voor maaltijd of consumpties
Kosten: voor NVON-leden *f* 25,– (incl. congres, excl. maaltijd/cons.)
voor niet-leden *f* 50,– (als boven)
Opgave: vóór 20 maart schriftelijk met vermelding van voorafgaand vervoer aan E. Jongejan, Smelenhof 25, 6596 DR Milsbeek door gelijktijdige storting op postgiro 2649277 t.n.v.

NVON-ledenservice, Postbus 90247, 1006 BE Amsterdam, met vermelding: MNU-dag
Deelname gelimiteerd, in volgorde van betaling
Verdere informatie: 08851-16540; in de avonduren

Mathematisch Congres

In kader van het 23ste Nederlands Mathematisch Congres, dat gehouden wordt op 15 en 16 april 1987 te Utrecht, is er op donderdag 16 april een serie lezingen met als thema 'Nieuwe Ontwikkelingen in de Wiskunde'. Deze voordrachtenserie is bedoeld voor een breed gehoor. Wiskundeleraren kunnen op deze wijze kennis nemen van nieuwe ontwikkelingen op diverse gebieden van de wiskunde. Sprekers zijn dr. F. M. Dekking, dr. H. W. M. Hendriks, prof. dr. R. Tijdeman en prof. dr. J. H. van Lint. De inschrijvingskosten bedragen *f* 10,– of *f* 20,– incl. lunch. Inschrijving is mogelijk tot 20 februari en geschiedt door overmaking van het bedrag op postgirorekening 5685801 t.n.v. F. Beukers, penningmeester W.G. Congres '87 te Utrecht. Voor nadere inlichtingen kan men zich wenden tot J. R. Strooker, tel. (030) 53 15 16.

Vrijdag de dertiende

R. Troelstra

Verantwoording

Op welke dag van de week valt de dertiende van de maand het vaakst?
Het antwoord is erg bekend, zodat ik aarzel deze vraag te stellen.
Als de kwesties 'periodiciteit' en het rekenen 'modulo iets' aan de orde kwamen, heb ik vroeger wel eens met een schoolklas aan deze vraag zitten rekenen. De manier waarop wij toen te werk gingen lijkt mij wiskundig wel interessant. Het is mij bovendien niet bekend, dat deze methode ergens is gepubliceerd. Daarom waag ik het toch maar een stukje aan dit onderwerp te wijden.

Opmerkingen

1 De aanleiding tot dit stukje was het interessante artikel van *J. Kieft* in *Euclides* 62 (aug/sept. 1986).

2 De overgang van de Juliaanse tijdrekening naar de Gregoriaanse heeft hier en daar sporen nagelaten: In Friesland begint het dienstverband van agrarisch personeel traditioneel op 12 mei. Dat is de 'âlde maaie', de oude mei.
De Russische revolutie van 7 november 1917 heet de oktoberrevolutie. Op die dag was het volgens de tijdrekening 'oude stijl' in Rusland nog oktober.

3 Aan de namen september, oktober, november en december, zijnde de zevende, achtste, negende en tiende maand, is te zien dat het jaar vroeger op 1 maart begon. Ook in dit stukje zullen we 1 maart als eerste dag van het jaar nemen. Daardoor wordt een

optredende onregelmatigheid, namelijk een eventuele 29-ste februari zo ver mogelijk naar achteren geschoven.
Om verwarring te voorkomen zullen we een jaar als 1984 een schrikkeljaar blijven noemen, hoewel 29 februari van dat jaar eigenlijk bij 1983 zou horen.
Een voordeel van dit systeem is ook, dat elke dag zijn vaste rangnummer heeft. Zo is 13 mei elk jaar de 74-ste dag van het jaar.

4 De sabbath (zaterdag) is de zevende dag van de week, dus de zondag de eerste.
Wij zullen ons hier aan deze Joodse, Christelijke en Islamitische traditie houden.

Nieuwjaarsdag (1 maart) in de zeventiende eeuw

In het artikel van Kieft is uiteengezet, dat de Gregoriaanse kalender periodiek is met een periode van 400 jaar.
Om te weten te komen hoe vaak 1 maart op zondag, maandag enzovoort valt, moeten we beginnen met tellen.
Toen we destijds met een klas dit probleem bekeken, telden we een hele periode van 400 jaar. Dat was erg verhelderend in die zin, dat weer eens bleek, hoe moeilijk secuur tellen is.
Bij het schrijven van dit stukje merkte ik, dat het eenvoudiger kan. Het tellen van één eeuw is genoeg.
Om een beetje concreet te kunnen praten nemen we de periode van 400 jaar die begint op 1 maart 1600.
We moeten erop letten, dat de eeuwjaren 1700, 1800 en 1900 geen schrikkeljaren zijn, maar 1600 en 2000 wel. Door de keuze van de periode hebben we de 'uitzondering op de uitzondering', namelijk februari 2000 helemaal op het eind geplaatst.
We gaan nu tellen: 1 maart 1600 valt op woensdag. Dat kunnen we te weten komen met de tabellen van Kieft. Het is echter ook eenvoudig even door te tellen. In 1986 viel 1 maart op za., dus: 1987: zo.; 1988: di. (schrikkeljaar!); 1989: wo.; en zo verder tot 1 maart 2000: wo.
Let erop, dat 2000 wèl een schrikkeljaar is. Wegens de periode van 400 jaar valt 1 maart 1600 op dezelfde dag als 1 maart 2000, dus op wo. We bekijken nu de eeuw die op 1 maart 1600 begint. Zo lang er geen eeuwjaar is, dat roet in het eten gooit, is de kalender periodiek met een periode van 28 jaar, net als de Juliaanse kalender.
In zo'n periode van 28 jaar valt 1 maart op elke dag van de week 4 keer. We kunnen hier drie zulke periodes gebruiken, respectievelijk beginnend op 1 maart van 1600, 1628 en 1656.
Daarna wordt het echt tellen.
1 maart 1684: wo. (net als 1 maart 1600);
1 maart 1685: do.; en zo verder tot en met
1 maart 1699: zo.
Wie dit lijstje even uitschrijft zal voor de zeventiende eeuw de volgende verdeling van 1 maart over de dagen van de week vinden:
zo.: 14; ma.: 14; di.: 14; wo.: 14; do.: 15; vr.: 14 en za.: 15.
We zullen dat in dit stukje 'de frequentieverdeling van 1 maart in de zeventiende eeuw' noemen. We kunnen deze frequentieverdeling aangeven met de vector (14, 14, 14, 14, 15, 14, 15).
Om met deze vector op een geschikte wijze te kunnen rekenen, stellen we hem voor door een veelterm: (1 maart in zeventiende eeuw:)

$$14x^1 + 14x^2 + 14x^3 + 14x^4 + 14x^5 + 14x^6 + 15x^7 \qquad (1)$$

Hierin betekent dus bijvoorbeeld $15x^5$, dat 1 maart in die eeuw 15 keer op donderdag valt. Met deze veelterm gaan we rekenen, waarbij we de coëfficiënten modulo 7 nemen, dus voor x^8 schrijven we x^1 enzovoort. Soms kan het handig zijn in plaats van x^7 te schrijven x^0.
Voor wie het liever wat ingewikkelder zegt: we rekenen met deze veelterm modulo $(x^8 - x^1)$.

De frequentieverdeling van 1 maart

We bekijken nu de eeuw die op 1 maart 1700 begint. We zagen al, dat 1 maart 1699 een zondag was. Omdat 1700 geen schrikkeljaar is, is 1 maart 1700 een maandag.
De frequentieverdeling in deze eeuw vinden we dus uit (1) door van woensdag over te gaan op maandag, dat wil zeggen: 5 dagen vooruit. Dit komt neer op een vermenigvuldiging van (1) met x^5.
Bij de overgang naar 1 maart 1800 krijgen we weer een zelfde sprong, dus moeten we opnieuw vermenigvuldigen met x^5.
Dat herhaalt zich dan nog een keer bij de overgang naar 1 maart 1900.

De frequentieverdeling van 1 maart over de hele periode van 400 jaar vinden we dus door (1) te vermenigvuldigen met:
$1 + x^5 + x^{10} + x^{15}$. Voor 1 schrijven we x^7 (of desgewenst x^0) en de andere termen herleiden we.
Er komt: $x^1 + x^3 + x^5 + x^7$ (2)
Als produkt van (1) en (2) vinden we:
(frequentieverdeling van 1 maart:)
$58x^1 + 56x^2 + 58x^3 + 56x^4 + 58x^5 + 57x^6 + 57x^7$ (3)

De hulpkalender

Het rangnummer van 1 maart is 1, dat van 13 mei is 74. Willen we dus de frequentieverdeling van 13 mei in een periode van 400 jaar opstellen, dan kunnen we (3) vermenigvuldigen met x^{73}, dat is met x^3.
Het is in dit verband handig gebruik te maken van een kalender waarbij 1 maart op zaterdag valt. Dan valt 13 mei op dinsdag, waaruit we meteen afleiden, dat we (3) met x^3 moeten vermenigvuldigen.
In analogie met de ouderwetse 'hulplijn' noem ik die kalender de hulpkalender.

De dertiende van de maand

Uit de hulpkalender blijkt:
de frequentieverdeling van 13 maart vinden we door (3) te vermenigvuldigen met x^5,
de frequentieverdeling van 13 april vinden we door (3) te vermenigvuldigen met x^1, enzovoort.
We vatten al die dertienden samen door in de hulpkalender de frequentieverdeling van de dertiende te tellen.

(frequentieverdeling van de 13-de in de hulpkalender:)
$2x^1 + 1x^2 + 2x^3 + 1x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 2x^7$ (4)
De frequentieverdeling van de dertiende in een periode van 400 jaar vinden we door het produkt van (3) en (4) te berekenen. Er komt uit:
$687x^1 + 685x^2 + 685x^3 + 687x^4 + 684x^5 + 688x^6 + 684x^7$
In een periode van 400 jaar valt de dertiende dus 688 keer op vrijdag, net iets meer dan op enige andere dag van de week.
Daarmee is de vraag uit het begin van dit stukje beantwoord.

Hulpkalender (1 maart op zaterdag)

	maart	april	mei	september	oktober	november
z	2 9 16 23 30	6 13 20 27	4 11 18 25	7 14 21 28	5 12 19 26	2 9 16 23 30
m	3 10 17 24 31	7 14 21 28	5 12 19 26	1 8 15 22 29	6 13 20 27	3 10 17 24
d	4 11 18 25	1 8 15 22 29	6 13 20 27	2 9 16 23 30	7 14 21 28	4 11 18 25
w	5 12 19 26	2 9 16 23 30	7 14 21 28	3 10 17 24	1 8 15 22 29	5 12 19 26
d	6 13 20 27	3 10 17 24	1 8 15 22 29	4 11 18 25	2 9 16 23 30	6 13 20 27
v	7 14 21 28	4 11 18 25	2 9 16 23 30	5 12 19 26	3 10 17 24 31	7 14 21 28
z	1 8 15 22 29	5 12 19 26	3 10 17 24 31	6 13 20 27	4 11 18 25	1 8 15 22 29

	juni	juli	augustus	december	januari	februari
z	1 8 15 22 29	6 13 20 27	3 10 17 24 31	7 14 21 28	4 11 18 25	1 8 15 22(29)
m	2 9 16 23 30	7 14 21 28	4 11 18 25	1 8 15 22 29	5 12 19 26	2 9 16 23
d	3 10 17 24	1 8 15 22 29	5 12 19 26	2 9 16 23 30	6 13 20 27	3 10 17 24
w	4 11 18 25	2 9 16 23 30	6 13 20 27	3 10 17 24 31	7 14 21 28	4 11 18 25
d	5 12 19 26	3 10 17 24 31	7 14 21 28	4 11 18 25	1 8 15 22 29	5 12 19 26
v	6 13 20 27	4 11 18 25	1 8 15 22 29	5 12 19 26	2 9 16 23 30	6 13 20 27
z	7 14 21 28	5 12 19 26	2 9 16 23 30	6 13 20 27	3 10 17 24 31	7 14 21 28

29 februari

Een voor de hand liggende vraag is:
Hoe is de frequentieverdeling van 29 februari?
In een periode van 400 jaar komt 97 keer een 29-ste februari voor. De frequentieverdeling vindt men gemakkelijk door tellen:

$$13x^1 + 15x^2 + 13x^3 + 15x^4 + 13x^5 + 14x^6 + 14x^7 \qquad (5)$$

Het is ook mogelijk (5) af te leiden uit (3) met gebruikmaking van de hulpkalender. Bij de afleiding komt een aardig verband tussen (3) en (5) aan het licht. Telt men de veeltermen (3) en (5) op, dan ontstaat er een veelterm waarbij alle coëfficiënten 71 zijn. In zekere zin is dus de veelterm (5) een complement van veelterm (3).
Deze uitkomst brengt ons op een idee: laten we zowel 29 febr. als 1 maart uitroepen tot nieuwjaarsdag. In een schrikkeljaar hebben we dan twee nieuwjaarsdagen achter elkaar. We kunnen 29 febr. omdopen tot 0 maart.
In een periode van 400 jaar valt nieuwjaarsdag op elke dag van de week even vaak, namelijk 71 keer.
Dit voorstel biedt extra voordelen:

1 Het ongemak van een schrikkeldag ergens midden in het jaar is verdwenen.
2 De enorme feestdrukte in de winter wordt verminderd doordat 'oud en nieuw' worden verplaatst.
3 Er komen in 400 jaar 97 gezellige nieuwjaarsdagen meer.
4 Mensen die op 29 februari geboren zijn, zijn nu op nieuwjaarsdag jarig. Ze kunnen dus elk jaar hun verjaardag uitbundig vieren; in schrikkeljaren zelfs twee dagen achter elkaar.

Laten we een actiegroep oprichten!

Vragen

1 Hoe vaak in de 400 jaar valt de tweede kerstdag op een zaterdag?
2 Het kan voorkomen dat we in december drie feestdagen in successie hebben, doordat de kerstdagen aansluiten op een zondag.
Hoe vaak doet dat verschijnsel zich voor?
3 Geef de frequentieverdeling voor tweede paasdag.
4 In 1984 viel de dertiende drie maal op een vrijdag. Hoe is dat te rijmen met (4)?
5 Leid (5) af uit (3).
6 Bedenk, dat $100 = 2^2 \cdot 5^2$ en gebruik dat om een ontbinding te vinden van de veelterm (1).

Literatuur

1 Gordon Moyer, 'The Gregorian Calendar', *Scientific American 246, 5* (1982) p. 104-111.
2 V. Frederick Rickey, 'Mathematics of the Gregorian Calendar', *The Mathematical Intelligencer 7, 1* (1985) p. 53-56.

Over de auteur:

Rudolf Troelstra, geboren op de dag van de oktoberrevolutie, is lange jaren wiskundeleraar geweest, achtereenvolgens in Sneek en in Hilversum. Daarna was hij ruim negen jaar docent in de didaktiek van de wiskunde aan de Vrije Universiteit te Amsterdam. De laatste jaren houdt hij zich, naast zijn werk als huisman, hoofdzakelijk bezig met entomologie en studie van de Turkse taal.

Differentiatie in heterogene groepen

Heterogeen door de jaren heen

Hans Pouw

1 Inleiding

Veranderingen
De laatste tientallen jaren kreeg de wiskundedocent te maken met enorme veranderingen in de werksituatie. Veranderingen in de leerlingenpopulatie, op het vakgebied, op schoolniveau als wel op beleidsniveau.
Wij denken bijvoorbeeld aan de invloeden die de afdeling Wiskobas van het IOWO heeft gehad op het basisonderwijs. Aan de leerlingen in de eerste klas van het voortgezet onderwijs is goed te merken dat zij niet alleen rekenen, maar ook wiskunde gehad hebben in het basisonderwijs.
De projectgroep 12-16 jaar van de Stichting voor leerplanontwikkeling (SLO) heeft voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs allerlei leerstofpakketjes ontwikkeld. Zij heeft hiermee het werk van de afdeling Wiskivon van het IOWO voortgezet. Deze pakketjes zijn te karakteriseren met: wiskunde voor iedereen en werken in heterogene groepen. Veel docenten in het voortgezet onderwijs gebruiken dergelijke pakketjes wel eens naast een leerboek in de klas.
In de bovenbouw van het vwo zien we de landelijke invoering van het HEWET-programma en de voorgestelde invoering van het HAWEX-programma. Beide programma's te karakteriseren met: toepassingsgerichte, contextrijke, minder formele wiskunde.

Naast deze veranderingen op het vakgebied krijgt de wiskundedocent te maken met fikse veranderingen op andere niveau's. De leerlingenaantallen lopen terug. Dat betekent voor nogal wat scholen fusies. Soms tussen scholen met zeer verschillende culturen zoals bijvoorbeeld lhno-lts combinaties. Nogal wat scholen vergroten hun zorgbreedte. Docenten staan voor veel heterogenere klassen dan ze gewend waren. Er zit een andere leerling in de klas. Mondiger, dus lastiger voor de docent. Een leerling met een minder grote spanningsboog, minder geconcentreerd. Er is een beleid naar brede scholengemeenschappen met voortgezet basisonderwijs (Vbao scholen). Op scholen spelen zich discussies af of het wel verstandig is te groeien naar een dergelijke school. Zulke discussies vergen veel energie.

Alhoewel de Nieuwe Leraren Opleidingen (NLO's) op deze veranderingen reageren door zowel de opleiding van de toekomstige wiskundeleraren als de nascholing voor de huidige leraren bij te stellen blijft er bij veel docenten behoefte aan begeleiding bij de praktijk van het lesgeven.

SiO-aanbod voor wiskunde
In het project Scholen in Ontwikkeling (SiO) is een gedifferentieerd begeleidingsaanbod ontwikkeld. Aan het SiO-project nemen ongeveer 350 scholen deel. Deze scholen willen bereiken dat:

1 de periode van onderwijs aan heterogene groepen wordt verlengd (2-jarige heterogene onderbouw). Na afloop van de brugperiode moeten alle leerlingen in principe nog iedere vervolgopleiding kunnen kiezen. Dit stelt zware eisen aan de inrichting van het determinatieproces in de wiskundeles.
2 de realiteitswaarde van het onderwijs wordt verhoogd. We zien ontwikkelingen in de richting van allemens wiskunde: contextrijke, toepassingsgerichte, minder formele wiskunde.
3 het onderwijsaanbod wordt herzien met het oog op het tegemoet komen aan de verschillen tussen leerlingen.
4 nieuwe leerinhouden worden geïntroduceerd. U kunt hierbij denken aan de invoering van vakken als Algemene Technieken en Burgerinformatica, maar ook aan invoering van vormen van projectonderwijs.

Wiskundesecties die deelnemen worden bij het realiseren van bovenstaande doelen ondersteund door het volgende aanbod:

A In werkgroepen worden vier programma's aangeboden. Per programma zes bijeenkomsten.
- *een basisprogramma*: gericht op het in de vingers krijgen van het werken met allemens wiskunde in heterogene groepen;
- *een brugfaseprogramma*: gericht op het inpassen van de ideeën en materialen uit het basisprogramma in het leerplan van het eerste jaar van de eigen school;
- *een keuzefaseprogramma*: gericht op het gestalte geven aan een goede determinatie in het tweede jaar;
- *een afsluitingsfaseprogramma*: gericht op het organiseren in derde klassen waarin B- en C-leerlingen zitten.

Aan deze werkgroepen nemen ongeveer 100 wiskundesecties deel. Voor het merendeel brede avo-lbo en lbo-lbo Scholengemeenschappen zoals mavo-leao en lto-lhno combinaties.

B Naast deze werkgroepen worden conferenties gegeven over specifieke onderwerpen. De onderwerpen worden aangedragen door de deelnemende secties. In het verleden zijn er bijvoorbeeld conferenties geweest over: het kiezen van een methode, de computer als hulpmiddel in het wiskundeonderwijs en het gebruik van materialen bij het wiskundeonderwijs. Hieraan gaan dit jaar weer ongeveer 100 secties deelnemen.

C Secties die vastlopen kunnen incidenteel begeleid worden op de school zelf. Wiskundedocenten zeggen bijvoorbeeld: 'De leerling met een i-indicatie nemen wij op in de brugklas. In deze situatie kunnen wij met jullie ideeën en materialen niet uit de voeten. Kom eens op school kijken'. Of: 'onze eindexamenresultaten zijn erg slecht. De sectie denkt verdeeld over de oorzaak. Een aantal denkt dat we te lang werken met allemens wiskunde in de onderbouw. Kom eens praten'.

De kadergroep wiskunde van het SiO-project verzorgt dit aanbod. Zij bestaat uit:
- 10 wiskundedocenten die zelf lesgeven op de betreffende scholen en die één dag in de week zijn vrijgeroosterd voor dit SiO-werk;
- 6 medewerkers van de NLO's, die een halve dag per week beschikbaar zijn;
- 1 medewerker van de SLO: een halve dag per week beschikbaar;
- een coördinator van de LPC: 1½ dag per week beschikbaar (auteur van dit artikel).

In dit en volgende artikelen willen we beschrijven welke ideeën en materialen wij, in samenwerking met de deelnemende secties wiskunde, de afgelopen vier jaar ontwikkeld hebben. Karakteristiek voor onze aanpak daarbij is:
functioneel omgaan met de verschillen in heterogeniteit van de groep leerlingen door de jaren heen.
Naar ons idee is het zinnig om in het onderwijs drie fasen te onderscheiden. Een oriëntatie-, een determinatie- en een afsluitingsfase. Verderop lichten we deze begrippen toe. Per periode proberen we het type leerstof en de didactiek op het doel van die periode af te stemmen.
We hebben ons verhaal in vieren gesplitst. In dit eerste artikel geven we een algemene beschrijving van onze opvattingen over het omgaan met de heterogeniteit door de jaren heen. In de drie nog volgende artikelen zoomen we in op de oriëntatie-, determinatie- en de afsluitingsfase.

2 Heterogeen door de jaren heen

De klant
In het project Scholen in Ontwikkeling gaan we ervan uit dat we te maken hebben met wiskundesecties of vertegenwoordigers van de wiskundesecties die:
- lesgeven aan *heterogene klassen*.
- een voorkeur hebben voor een *pragmatische aanpak*. Een docent is tenslotte gebonden aan de huidige eindexamens en aan een leerboek. De docent vindt dat hij/zij niet zelf een volledig nieuw leerboek hoeft te ontwikkelen.
- graag *ontwerpen*. De docent is geïnteresseerd in de nieuwe ontwikkelingen op het vakgebied. Vindt het een uitdaging die ontwikkelingen te beoordelen op hun practische waarde. En deze in te bouwen in de eigen wiskundeles.
- gesteund door de schoolleiding. De sectie werkt op een planmatige wijze mee aan een *schoolproject*.

Veel secties hebben in het verleden gekozen voor een basisstof extra-stof model gericht op het be-

heersen van de leerstof. De leerstof werd geanalyseerd op basis-, herhalings- en verrijkingsstof. De leerstof was formeel van karakter en bereidde voor op het eindexamen. In de basisperiode was de leerstof hetzelfde voor alle leerlingen. De leerlingen die na de basisperiode de leerstof nog niet goed begrijpen gingen herhalen. De anderen kregen extra stof te doen.

Er zitten sterke kanten aan dit model:
- de leerlingen die wiskunde in het eindexamenpakket nemen worden goed voorbereid.
- de leerlingen kunnen individueel door de leerstof heen.
- de vorderingen van de leerlingen zijn goed te volgen. Diagnose en remedie zijn daardoor goed mogelijk.
- determineren is goed mogelijk.

Er zitten echter ook nadelen aan dit model:
- de leerlingen die geen wiskunde kiezen krijgen leerstof waar ze nooit meer wat aan hebben.
- de leerlingen worden gedrukt op wat ze niet kunnen en leggen zich nogal eens vroegtijdig neer bij de selectie.

De secties hanteren een dergelijk model vaak gedurende de hele leerweg van de leerling. Al bij het eerste hoofdstuk, in de eerste klas, wordt de leerstof aangeboden in de driedeling basis-, herhalings-, verrijkingsstof. Ook al bevat dat eerste hoofdstuk een leuk stukje meetkunde waar alle leerlingen in het verleden een voldoende voor haalden. Het argument is dan dat ze vast aan dit differentiatiemodel moeten wennen.

Wij pleiten voor een meer leerling gerichte aanpak. En wel:
- verdeel de periode waarin de leerling wiskundeonderwijs krijgt in een paar fasen.
- formuleer per fase zo goed mogelijk de bedoeling die je met de leerlingen hebt.
- formuleer zo goed mogelijk welke verschillen tussen de leerlingen je in zo'n fase relevant vindt.
- maak dan zo passend mogelijke keuzes voor de leerstof en de didactische aanpak.

Fasen

Gesteund door onze ervaring in het SiO-project hebben we de periode waarin de leerling wiskunde krijgt verdeelt in drie fasen nl.:
- *een oriëntatiefase*:
  de leerling maakt met zoveel mogelijk facetten van de wiskunde kennis. De leerling krijgt wiskunde die relevant is voor alle Nederlanders. De leerling moet zelfvertrouwen krijgen bij het werken aan wiskunde.
- *een keuzefase*:
  het kiezen van het niveau waarop de leerling met wiskunde doorgaat staat centraal. Het accent ligt op vragen als: 'wat kan ik', 'wat wil ik'.
  De leerling wordt geconfronteerd met wiskunde waarin de eisen van de vervolgopleiding zijn verwerkt. In de les is veel gelegenheid voor het wegwerken van tekorten.
- *een afsluitingsfase*:
  het programma is afgestemd op het behalen van het door de leerling gewenste eindniveau. De leerling krijgt een zo goed mogelijke eindexamen-training. De leerling is vooral geïnteresseerd in het halen van een zo'n hoog mogelijk cijfer.

Wij praten over fasen en niet over leerjaren, omdat in de praktijk scholen hierin zeer verschillende keuzen doen. Bij de ene school sluit de oriënterende fase af bij het herfstrapport in het eerste leerjaar, bij de andere school bij het kerstrapport in het tweede leerjaar. Bij de een begint de afsluitingsfase bij de kerst in het vierde leerjaar, bij de ander in de eerste klas.

Verschillen tussen leerlingen

Mensen verschillen natuurlijk in ontelbaar veel opzichten van elkaar.

De kadergroep wiskunde van het SiO-project heeft wat meer structuur aangebracht in deze verzameling van verschillen. Bij het aanbrengen van deze structuur hebben we ons laten leiden door twee criteria:
- zijn er duidelijke onderzoeksgegevens over de betreffende verschillen tussen de leerlingen bekend en zijn de verschillen relevant
- voor de inrichting van het wiskunde-onderwijs volgens de drie genoemde fasen.

Zonder nu uitgebreid op deze structurering van verschillen tussen leerlingen in te gaan en zonder nu uitputtend te zijn noemen we een aantal aspecten:

verschillen in *beginsituatie* zoals:
- verschillen in voorkennis. Relevant omdat bijv. onderzoek uitwijst dat leerlingen met veel voorkennis heel goed leren in een doceerles.
- verschillen in opgebouwde voorkeur voor een aanpak bij soortgelijke problemen.
- verschillen in een opgebouwde verwachting t.a.v. een opdracht. Als leerlingen beginnen met het gevoel, 'daar kan ik toch niets mee' worden er duidelijk slechtere prestaties geleverd dan nodig.

verschillen in *aanpak* zoals:
- verschillen in voorkeur voor het opnemen van informatie door te luisteren, lezen, praten, doen, kijken of te schrijven.
- verschillen in veld(on)afhankelijkheid. Ofwel verschillen in de mate waarin mensen zelf informatie kunnen structureren dan wel een gegeven structuur kunnen herkennen.
- verschillen in geheelstrategie. Ofwel verschillen in de mate waarin leerlingen de leerstof volledig willen beheersen alvorens zin te hebben in nieuwe informatie.

verschillen in *motivatie* zoals:
- verschillen in faalangst, de angst om te falen beïnvloedt de prestatie negatief.
- verschillen in toeschrijving van een leerresultaat. Een goed resultaat wordt bijv. toegeschreven aan toeval waardoor een leerling een laag zelfbeeld houdt.
- verschillen in behoefte aan veiligheid. De drijfveer om aan een probleem te werken is voor de ene leerling het veilige gevoel de opdracht aan te kunnen en voor een ander de wil om het vak op D-niveau te willen afsluiten.

Met dergelijke verschillen in beginsituatie, aanpak en motivatie bij leerlingen in het achterhoofd hebben we per fase (oriëntatie, keuze en afsluiting) zo passend mogelijk ontwerp voor leerstof en didactiek gemaakt.

3 Wordt vervolgd

In drie vervolgartikeltjes willen wij ingaan op het wiskunde-onderwijs in de oriëntatie-, keuze- en afsluitingsfase. Wij zullen dan minder ruimte nodig hebben om de achtergronden van het SiO-project toe te lichten en kunnen uitgebreid ingaan op de leerstof en de werkwijze in de klas. We zullen ook aandacht besteden aan het werk dat er aan vastzit als een sectie op deze manier aan de slag wil.

In de oriëntatiefase pleiten we voor veel aandacht aan verschillen in aanpak. Als leerlingen met hun eigen leerstijl met wiskunde bezig kunnen zijn, zullen zij niet zo gauw afhaken. Voor de leerstof betekent dat veel open en contextrijke problemen.

In de determinatiefase pleiten we voor veel aandacht aan de verschillen in motivatie van de leerlingen. De leerling staat voor een zware beslissing. Laag zelfbeeld, faalangst, ongelukkige manieren van toeschrijving van een resultaat vormen even zovele valkuilen in het keuzeproces van de leerling. Gedurende een aantal maanden moet het werken aan de wiskunde ondersteunend zijn voor dit keuzeproces.
Voor de leerstof betekent dit afwisselend pakketjes met allemens wiskunde en meer formele wiskunde.

In de afsluitingsfase pleiten we voor meer aandacht aan de verschillen in beginsituatie van de leerling. De leerlingen hebben gekozen en zullen nu, met hun capaciteiten het eindexamen willen halen. In deze fase hebben wij een klas voor ogen waarin grote niveauverschillen aanwezig zijn. Bovendien moeten de leerlingen verschillende soorten eindexamens afleggen. Een klas waarin B en C leerlingen bij elkaar zitten, hoe ziet daar het wiskundeonderwijs eruit?

'Vrouwen en Wiskunde' verkent het internationale circuit

Impressies van een conferentie

Heleen Verhage, Truus Dekker

De werkgroep Vrouwen en Wiskunde is zo zoetjes aan in de arena van het wiskundeonderwijs geen onbekende meer. Wat u misschien nog niet weet, is dat er ook een International Organisation of Women and Mathematics Education (IOWME) is. De IOWME is weer een onderdeel van de PME (Psychology of Mathematics Education), een groep onderzoekers die zich met de psychologie van het wiskundeonderwijs bezighoudt.
De PME organiseert jaarlijks een conferentie, die dit jaar van 20 tot 25 juli in Londen is gehouden. Een van de onderdelen van het programma was een door de IOWME georganiseerde discussiegroep over het thema 'gender and mathematics'. Volgens de Oxford Advanced Learner's Dictionary of Current English betekent 'gender' onder meer 'sex, being male or female'. Een goede vertaling van 'gender' is moeilijk te geven, want het betekent méér dan alleen de biologische verschillen tussen de sexen. Ruim twintig vrouwen èn mannen namen deel aan de discussiegroep en hiermee waren de volgende landen vertegenwoordigd: Engeland, USA, Australië, Canada, Israël, Frankrijk, Duitsland en Nederland. Namens de werkgroep Vrouwen en Wiskunde waren schrijfsters dezes aanwezig om te vertellen over de stand van zaken in Nederland.

Tijdens de discussie maar ook in de wandelgangen kwamen verschillende zaken aan bod, zoals:
- feitelijke informatie over de percentages van deelname van meisjes aan het wiskundeonderwijs en hun prestaties;
- onderzoek dat gedaan is om eventuele verschillen tussen meisjes en jongens in deelname, prestatie en attitude te verklaren;
- concrete activiteiten die worden ondernomen om de deelname van meisjes aan het wiskundeonderwijs te bevorderen;
- plannen en ideeën voor de toekomst in de verschillende landen.

Het is niet de bedoeling om in dit artikel een compleet verslag van de verschillende bijdragen en de discussie te geven, maar wellicht is het aardig om een paar opmerkelijke krenten uit de pap te pikken en van commentaar te voorzien.

Sexe-verschillen in het IEA onderzoek

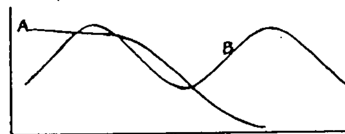
In opdracht van de IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) is een aantal jaren geleden een groot internationaal vergelijkend onderzoek uitgevoerd naar de wiskundeprestaties van 13-jarigen (zie [1]). In diverse landen zijn de gegevens die in het kader van dit onderzoek verzameld zijn geanalyseerd met het oog op verschillen tussen jongens en meisjes. Het is gebleken dat de verschillen tussen *landen* veel groter zijn dan de verschillen tussen de *sexen*. Van de twintig landen die in dit onderzoek waren betrokken waren er 5 die geen verschil te zien gaven tussen meisjes en jongens, in 5 landen deden de meisjes het beter en in 10 landen deden de jongens het beter. Hierbij moet opgemerkt worden dat met 'beter' 'gemiddeld beter' wordt bedoeld, dus niet op alle onderdelen van de toets beter. Bij algebra en rekenen kwamen de meisjes er soms beter af, bij meetkunde de jongens vaak.
Alhoewel Nederland in z'n totaliteit bij dit onderzoek niet zo slecht uit de bus komt, zijn de resultaten bij deze deelstudie naar sexe-verschillen voor ons land zeer opmerkelijk. Nederland behoort niet alleen bij de landen waar de jongens het beter doen, maar is ook nog het land met de grootste *verschillen tussen jongens en meisjes* voor wat betreft de toetsresultaten.
Deze conclusie is consistent met de uitkomst van een vergelijkbare analyse die op basis van het IEA onderzoek uit 1964 is gemaakt. Ook toen kwam Nederland als een van de landen met de grootste verschillen tevoorschijn (zie [2]).

Onderzoek of aktie?

Tussendoor een persoonlijke kanttekening. Voor een rasechte onderzoeker roept elk onderzoek natuurlijk nieuwe onderzoeksvragen op, waarmee men weer jaren vooruit zou kunnen om uit te zoeken waarom Nederland er in deze vergelijkende deelstudie zo beroerd uit komt. Pas als dit allemaal is uitgezocht, zou het mogelijk zijn om goed gefundeerde beslissingen te nemen over hoe het probleem op te lossen (aangenomen dat u de geringere deelname van meisjes aan exacte vakken en hun lagere prestaties, net als wij, als een probleem beschouwt). Nu wordt er al decennia lang onderzoek gedaan naar de kwestie van aanleg en omgeving en de materie is zo complex dat dat ongetwijfeld ook nog decennia lang volgehouden kan worden. Een overzicht van wat dit onderzoek tot dusver voor wat betreft het wiskundeonderwijs heeft opgeleverd, is te vinden in Vrouwiskundig [3] en in het artikel 'Wiskunde, niets voor meisjes?' van E. van Eck en L. Veeken [4].
Alhoewel we niets tegen wetenschappelijk onderzoek hebben, dreigt het gevaar dat er een behoudende werking vanuit gaat, waardoor de initiatieven van de *doeners* vertraagd kunnen worden. Het wachten op onderzoeksresultaten wordt maar al te vaak als excuus gebruikt om niets te hoeven doen. Voor de doeners is de algemeen geaccepteerde conclusie dat de verschillen in prestaties tussen jongens en meisjes bij wiskunde niet alleen te verklaren zijn uit een verschil in aanleg een voldoende basis om aan de slag te gaan. Aktie ondernemen op die terreinen waar duidelijk oorzaken liggen zet waarschijnlijk meer zoden aan de dijk dan blijven steken in de discussie over de kwaliteit van het onderzoek. Uitwisseling van informatie is wel essentieel om te voorkomen dat in het ene land een initiatief ontplooid wordt, zonder te weten dat dat in een ander land geen resultaat had.

De bijdrage van Vrouwen en Wiskunde

De tot droefenis stemmende onderzoeksresultaten van de IEA deelstudie stonden haaks op het enthousiasme waarmee wij als afgevaardigden van Vrouwen en Wiskunde één en ander verteld hebben over de vernieuwingen in het Nederlandse wiskundeonderwijs.
Het gebruik van contexten en de reacties die een bepaalde context kan oproepen hebben we geïllustreerd met het volgende protocol (ontleend aan [5]):



Temperatuursverloop in couveuse waarin een baby ligt.
Welke grafiek past bij de beschrijving? A/B/Geen van beide.
Leg uit waarom:

De samenwerking bij de opdracht verloopt als volgt:

'Wat is een couveuse nou weer!', roept Richard.
'Meester, dat malle ding, dat van die couveuse vind ik niks aan'.
Kees: 'Weet je niet wat een couveuse is?'
Richard: 'Ja, zo'n glazen bakkie waar zo'n baby in ligt, in een broeikas'.
Kees: 'Ja maar dat is wat grof gezegd. Waarom ligt zo'n baby daar in?'
'Te vroeg geboren', zegt Merlien.
Kees: 'En waar moeten ze dan voor zorgen?'
Merlien: 'Dat ie in leven blijft'.
Kees: 'En hoe doen ze dat onder andere?'
'Nou in zo'n kastje', zegt Merlien.
'En met de temperatuur?', vraagt Kees.
Merlien: 'Lekker warm'.
Kees: 'En denk je warm, heet, heet, warm?'
'Nee', zegt Merlien, 'warm, normaal'.
'Zou één van die grafieken dan kloppen, of allebei niet?', vraagt Kees en gaat weer verder.
'Nou volgens mij', Richard wijst op A, 'moet je kijken wat een temperatuurverschil. Ze maken dat kind ziek volgens mij hoor!'
'Geen van beide', vindt Merlien.
'Ja' zegt Richard, 'eerst 30° en dan ineens 5°. Nou hé, hoe word je ziek. Eerst in een kokende pan en dan in de sneeuw donderen of in een vrieskist'.
'Ik ga het even opschrijven', zegt Merlien, 'geen van beide, want anders krijg je warm, het wordt kouder, dan heel koud en dat kan niet, want dan was het kind al dood'.

Met in het achterhoofd de discussie die thans in Nederland wordt gevoerd over *Wiskunde voor allen* hebben we in onze bijdrage benadrukt dat wiskunde interessant en motiverend moet zijn voor zowel jongens als meisjes, en dat daarom de inhoud van het curriculum en de manier waarop de stof wordt aangeboden erg belangrijk zijn.

Dit uitgangspunt kan geconcretiseerd worden in richtlijnen voor tekstboeken. De ALM (Adviesgroep Leermiddelen) heeft voor een aantal vakken (niet voor wiskunde) dergelijke richtlijnen opgesteld (zie [6]). Gebruik makend van de ALM-richtlijnen voor natuurkunde kwamen we tot het volgende lijstje voor wiskundeleerboeken.
Uit een leerboek moet duidelijk zijn dat:
- wiskunde met mensen te maken heeft;
- wiskunde met het dagelijks leven te maken heeft;
- wiskunde met de maatschappij te maken heeft;
- wiskunde met de beroepswereld te maken heeft;
- wiskunde een eigen geschiedenis heeft.

Het blijkt dat het Hewet materiaal voor wiskunde A goed aan deze criteria getoetst kan worden. Uit 'Lessen in Ruimtemeetkunde' [7] blijkt dat ook wiskunde B volgens deze criteria ingevuld kan worden.
De veranderingen van het Nederlandse wiskundecurriculum ten gevolge van het Hewetproject, gecombineerd met het feit dat meer leerlingen nu wiskunde kiezen, trekken beslist de nodige aandacht in het buitenland.

Initiatieven in Engeland

Echte doeners zijn in elk geval de Engelsen. Zelda Isaacson vertelde ons onder meer over verschillende initiatieven die in Engeland zijn genomen. Enkele voorbeelden zijn:

De Be-a-sumbody conferenties.
Dit zijn conferenties van één dag voor meisjes van 13 of 14 jaar. De meisjes kunnen deelnemen aan workshops waar ze op een niet-schoolse manier wiskunde doen. Daarnaast zijn er sessies over beroepenvoorlichting met vrouwen die in niet-traditionele beroepen werkzaam zijn. Een verslag van zo'n conferentie is te vinden in [8] en [10].

Experimenten met meisjesklassen.
Ook in Nederland wordt de mogelijkheid van speciale meisjesklassen voor exacte vakken overwogen. In opdracht van het ministerie is hier onlangs een uitgebreide studie van gemaakt. De resultaten zijn beschreven in het boekje 'Meisjes apart voor exacte vakken. Hoe apart zijn meisjes?' dat naar alle scholen is gezonden (zie [9]). Een belangrijke conclusie die wordt getrokken is dat in Engeland de meeste experimenten op dit terrein weer beëindigd zijn, niet omdat de meisjesklassen niet aansloegen, maar omdat het onvermijdelijke complement ervan, de jongensklassen, geen succes was. De jongens presteerden minder en er ontstonden ordeproblemen. Waar meisjes in de klas al niet goed voor zijn...
In de discussiegroep was men over het algemeen niet zeer enthousiast over de mogelijkheid van aparte meisjesklassen. Op korte termijn zijn de resultaten niet ongunstig, maar men is bang dat deze opzet op langere termijn toch tot ongewenste niveauverschillen tussen jongens- en meisjesklassen zal leiden, ten nadele van de meisjes.
Het spreekt vanzelf dat dergelijke oplossingen zeer cultuurgebonden zijn en dus niet klakkeloos door andere landen overgenomen kunnen worden.

Scholingsmateriaal voor leraren.
Onder de titel 'Girls into math' is materiaal ontwikkeld voor de nascholing van leraren. Bij dit pakket hoort een boek met achtergrondinformatie: 'Girls into math can go' [10]. Alhoewel dit boek sterk geïnspireerd is door enkele belangrijke in Engeland uitgevoerde onderzoeken, bevat het ook voor de Nederlandse lezer genoeg lezenswaardige informatie. Het boek is een bundeling van achttien artikelen van verschillende auteurs, die gezamenlijk het brede terrein van meisjes en wiskundeonderwijs wel ongeveer dekken. De bijdragen zijn gerangschikt in twee hoofdthema's:
What is the problem? en *What can be done?*
Een paar hoofdstukken die erg leuk zijn om te lezen hebben te maken met macht, maatschappelijk gezien of binnen het klaslokaal. Een citaat uit een kort en ongenuanceerd maar wel verfrissend hoofdstukje:

> Last century, when it was classical languages which opened career doors, it was widely established by reputable men, that girls could not do languages. But now that the focus has shifted and languages are not the testing ground for hierarchies and succes, girls have been found to be very good at the low-status subject of languages. It is mathematics that they find difficult now.
> And presumably if next century most power is

still concentrated in the hands of men, and child rearing is decreed as the crucial determinant for career advancement, it will soon be demonstrated that girls have no aptitude for child-rearing practices.

Een aantal hoofdstukken verderop lezen we (bij twee andere auteurs) over macht binnen de muren van het klaslokaal:

> We have argued strongly against an analysis which understands girls as powerless because feminine and against a model of girls simply 'sqeezed out' of academic performance. Relations of dominance and subordination, and of power and resistance, can be explored in relation to the social relations of the classroom. We shall argue that girls are not subordinated in any simple or once-and-for-all way but that they move from powerful to powerless positions from one moment to the next.

Wat volgt is een fraaie genuanceerde analyse van interacties en relaties in de klas, gebaseerd op observaties en protocollen. Het blijkt dat een kind het ene moment in een hulpvragende positie met weinig macht kan verkeren en het andere moment in een hulpgevende positie die meer macht geeft.
Alles bij elkaar levert het boek heel wat stof om over na te denken en te discussiëren.

Tenslotte

De discussiegroep had eigenlijk maar één bezwaar: de tijd die er in het programma voor was uitgetrokken was veel te kort en de wandelgangen hebben dit helaas niet helemaal kunnen opvangen. De winst van het geheel is echter duidelijk: er is veel informatie uitgewisseld, het was zeer inspirerend en stimulerend en het netwerk van de IOWME is weer een beetje hechter geworden.
Tot slot van dit artikel twee anecdotes om de problematiek wat te relativeren en de maatschappelijke en cultuurgebonden aspecten nog eens te benadrukken:

Anecdote 1.
We raken aan de praat met een conferentieganger uit China en vertellen van de discussiegroep waar we 's ochtends aan deelgenomen hebben. Hij vindt het heel interessant en vertelt dat ze in China ook een probleem hebben: *de meisjes doen het op school beter bij wiskunde dan de jongens.* Als we vragen of hij daar een verklaring voor kan geven, noemt hij twee aspecten van het leven in China die in dit verband van belang zouden kunnen zijn:
In China zijn vrouwen net zo bij het arbeidsproces betrokken als mannen. Er is dus veel minder verschil in toekomstperspectief voor jongens en meisjes.
Dit hadden we zelf ook nog wel kunnen bedenken, maar het tweede punt is frappant:
In China mag een echtpaar maar één kind hebben. Voor dat ene kind willen de ouders in alle opzichten het beste, het doet er dan niet toe of het een jongen of een meisje is.

Anecdote 2.
In de golfstaat Quatar studeren meer vrouwen dan mannen aan de universiteit.
Hoe zou dat komen, denkt u?
Antwoord: omdat de mannen in het buitenland studeren als dat enigszins kan.

Literatuur

1 Euclides, jrg. 61 nr. 2, okt. 1985/86. Themanummer *Het Tweede Wiskunde Project van de IEA.*
2 M. W. Steinkamp, D. L. Harnisch, H. J. Walberg, S. L. Tsai – *Cross national gender differences in mathematics attitude and achievement among 13-years-old.* In: The journal of Mathematical Behavior, jrg. 4 nr. 3 (1985) pp. 259-277.
3 M. Meeder en F. Meester – *Vrouwiskundig. Meisjes in het wiskundeonderwijs.* Groep Vrouwen en Wiskunde, 1984. Te bestellen bij: F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda.
4 E. van Eck en L. Veelen – *Wiskunde, niets voor meisjes?* In: Pedagogische Studiën, jrg. 63 nr. 7/8 (1986), themanummer 'Vrouwenvakken – mannenvakken' pp. 293-304.
5 R. Dekker, P. Herfs, J. Terwel – *Wiskunde voor iedereen.* Interimrapport Projekt Interne differentiatie wiskundeonderwijs 12-16 (SVO-projekt 0647). Vakgroep Onderwijskunde, Utrecht, 1983.
6 I. Mottier – *Handleiding emancipatieaspecten in schoolboeken.* Adviesgroep leermiddelen, 's-Gravenhage 1983.
7 Hewet wiskunde – *Lessen in ruimtemeetkunde 1.* Educaboek 1985.
8 L. Burton en R. Townsend – *Girl-friendly mathematics.* In: Mathematics Teaching, nr. 111, juni 1985.
9 I. Kluvers en V. Goedhart – *Meisjes apart voor exacte vakken. Hoe apart zijn meisjes?.* Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen, 1986.
10 L. Burton (ed.) – *Girls into math can go.* Holt Education, Eastbourne, UK, 1986.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Mathematical Quickies van Charles W. Trigg (Dover editie) is een leuk boekje. Het bevat 270 opgaven van uiteenlopende soort. Er zijn oude bekenden bij, maar het merendeel is niet afgezaagd. Het zijn Quickies, hetgeen zeggen wil dat ze niet al te moeilijk zijn. Maar men kan ze stellig niet aan de lopende band oplossen. Om een indruk ervan te geven volgen hier een drietal opgaven uit de bundel.

557 70% van de volwassen mannelijke personen uit een samenleving hebben bruine ogen, 75% donker haar, 85% zijn langer dan 1,70 m en 90% wegen meer dan 140 pond. Hoe groot is het percentage dat alle vier kenmerken heeft, minstens?

558 Een piraat verborg een schat op een eiland. Dicht bij de kust lagen twee grote keien A en B. Verder landinwaarts stonden drie kokospalmen C_1, C_2 en C_3. De piraat ging staan in C_1, liep een stuk C_1A_1, gelijk aan en loodrecht op C_1A, gericht buitenwaarts de omtrek van driehoek AC_1B. Daarna C_1B_1 gelijk aan en loodrecht op C_1B en eveneens buitenwaarts gericht. Daarna fixeerde hij het snijpunt P_1 van AB_1 en BA_1. Analoog vond hij P_2 en P_3 uitgaande van C_2 en C_3. Hij verborg de schat ten slotte in het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek $P_1P_2P_3$.
Een paar jaar later kwam hij op het eiland terug om de schat op te graven. Helaas, de drie bomen waren verdwenen. Hoe vond hij de schat?

559 Herleid het produkt
$(3^{2^0}+1)(3^{2^1}+1)(3^{2^2}+1)\dots(3^{2^n}+1)$

Oplossingen

554 Bolzano geeft een bewijs van de stelling dat een lijnstuk de kortste verbinding van twee punten is. Zie hiervoor het vorige nummer. Is het bewijs juist?
Om dit te kunnen beoordelen, moeten we weten welke voorkennis in het bewijs ondersteld wordt. Uit de redenering wordt dit duidelijk. Bekend zijn de beginselen van de Euclidische meetkunde. In het bijzonder is bekend wat verstaan wordt onder de lengte van een lijnstuk. Bekend is de driehoeksongelijkheid en dus ook het feit dat het lijnstuk ab korter is dan elke gebroken lijn die a en b als uiteinden heeft. Verder weet men wat gelijkvormige figuren zijn en dat als de figuren F_1 en F_2 gelijkvormig zijn alle lijnstukken van F_2 k maal zo lang zijn als de overeenkomstige van f_2. Dan wordt het vager. Wat een kromme is, is intuïtief duidelijk. De lengte van een kromme wordt niet gedefinieerd. Maar wel wordt aangenomen dat van de gelijkvormige figuren F_1 en F_2 ook elke kromme in F_2 k maal zo lang is als de overeenkomstige kromme in F_1.
Er zijn dus lacunes. Laten we het niet te ingewikkeld maken en toegeven dat intuïtief duidelijk is wat een kromme is en wat het wil zeggen dat we een kromme met uiteinden a en b van a naar b doorlopen. Ik krijg dan toch wel behoefte aan een definitie van de lengte van zo'n kromme. Kies erop een serie consecutieve punten $p_0 = a$, p_1, p_2, ..., p_{n-1}, $p_n = b$. De lengte van de gebroken lijn $p_0p_1p_2\dots p_n$ is dan $p_0p_1 + p_1p_2 + \dots + p_{n-1}p_n$. Per definitie is de lengte van de kromme ab dan gelijk aan de limiet hiervan voor $n \to \infty$ als daarbij het maximum van de lengten p_ip_{i+1} tot 0 nadert. Daaruit volgt inderdaad dat in de gelijkvormige figuren F_1 en F_2 lengten van overeenkomstige krommen zich verhouden als $1:k$.
Het bewijs is dus correct. Maar het blijkt nu wel omslachtig te zijn. Omdat alle gebroken lijnen $p_0p_1\dots p_n$ langer zijn dan het lijnstuk ab is de kromme lijn ab ook langer dan het lijnstuk ab. De gelijkvormigheid is er dus onnodig bijgesleept.
Een echte fout is het volgende. De verzameling van de lengten van verbindingen van a en b is naar beneden begrensd en heeft dus een onderste grens. Het is echter niet zeker dat er een verbinding van a en b bestaat die deze onderste grens als lengte heeft. Het is dus niet verantwoord zonder meer te onderstellen dat er een kortste verbinding is. Maar dat is wel een ietwat onaardige kritiek op een publikatie uit 1851.

555 Een getal van acht cijfers is een kwadraat, de getallen gevormd door de eerste en door de laatste vier cijfers zijn ook kwadraten. Het getal begint niet met een 0 en eindigt niet op vier 0'en.
Noem het getal van acht cijfers c^2 en de getallen van vier cijfers resp. a^2 en b^2. Dan is
$10^4a^2 + b^2 = c^2$
$10^4a^2 = (c+b)(c-b)$
Onderstel dat a, b en c geen factor gemeen hebben.
$(c+b)(c-b)$ is even. Dus zijn $c+b$ en $c-b$ beide even.
$(c+b)(c-b)$ is deelbaar door 2^45^4, beide bevatten reeds een factor 2; de overige twee factoren 2 en vier factoren 5 moeten we dus nog over $c+b$ en $c-b$ verdelen. Onderstel bijv.
$c + b = 5000x$ en $c - b = 2y$.
Na enig overleg ziet men dat ook a, x en y geen factor gemeen hebben. Dus zijn er getallen p en q zo, dat $a = pq$, $x = p^2$ en $y = q^2$.
Nu is
$c = 2500p^2 + q^2$ en $b = 2500p^2 - q^2$.
Door de factoren van 2^25^4 op alle mogelijke manieren over $c+b$ en $c-b$ te verdelen, krijgt men de volgende mogelijkheden:

$c = 2500p^2 + q^2$ en $b = |2500p^2 - q^2|$ (1)
$c = 1250p^2 + 2q^2$ $b = |1250p^2 - 2q^2|$ (2)
$c = 625p^2 + 4q^2$ $b = |625p^2 - 4q^2|$ (3)
$c = 500p^2 + 5q^2$ $b = |500p^2 - 5q^2|$ (4)

$c = 250p^2 + 10q^2 \quad c = |250p^2 - 10q^2|$ (5)
$c = 125p^2 + 20q^2 \quad c = |125p^2 - 20q^2|$ (6)
$c = 100p^2 + 25q^2 \quad c = |100p^2 - 25q^2|$ (7)
$c = 50p^2 + 50q^2 \quad c = |50p^2 - 50q^2|$ (8)

In het eerste geval moet $|2500p^2 - q^2| < 100$. Dit geeft als enige mogelijkheid: $p = 1$, $q = 49$, $a = 49$, $c = 4901$, $b = 99$, $c^2 = 24019801$.

Het overzicht over alle mogelijkheden is:

geval	p	q	a	c	b	c^2
(1)	1	49	49	4901	99	24019801
(2)	1	24	24	2402	98	05769604
(3)	1	12	12	1201	49	01442401
	1	13	13	1301	51	01692601
(4)	1	9	9	905	95	00819025
(5)	1	4	4	410	90	00168100
(6)	1	2	2	205	45	00042025
	1	3	3	305	55	00093025
(7)	1	1	1	125	75	00015625
(8)	–					

We zouden nu nog a, b en c met een zelfde factor kunnen vermenigvuldigen. Dit levert echter geen nieuwe mogelijkheden. Zodat de enige oplossing is: $c^2 = 24019801$.

Kalender

12-14 maart 1987: Ede, Didactiek-conferentie.
18 en 19 maart 1987: Hilversum, Andere didactiek-conferentie.
28 maart 1987: Kapellen, Studiedag NVvW/VVWL.
2-4 april 1987: Ede, Didactiek-conferentie.
15 en 16 april 1987: Utrecht, Nederlands Mathematisch Congres
11 sept. 1987: Utrecht, Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

Boekbespreking

F. Goffree, *Wiskunde & Didaktiek voor aanstaande leraren basisonderwijs*, Wolters Noordhoff Groningen, 1982/1983/1985. Deel 1 *f* 39,75, deel 2 *f* 34,–, deel 3 *f* 41,–.

Zoals de ondertitel vermeldt is deze serie geschreven voor Pabo-studenten. De serie bevat reken/wiskundige problemen, wiskundig-didaktische opgaven, leesteksten en stageopdrachten. Het eerste deel bevat de volgende hoofdstukken:

1. Het land van okt.
2. Onze getallenwereld. Natuurlijke getallen.
3. Greep op getallen. Verwerven van getalbegrippen.
4. Pas op je tellen. Handig tellen.
5. Situaties, sommen en eigenvondsten. Het leren van de hoofdbewerkingen.

Het tweede deel bevat de hoofdstukken:

1. Nieuw kavelland. Passen en meten.
2. Zekerheid door vaardigheid. Het leren van algorithmen.
3. Tussen schijn en werkelijkheid. Probleemoplossen: rijke problemen, tekst en context.
4. Kijken, doen, denken en zien. Meetkundige aktiviteiten.
5. Grote momenten voor kleine kinderen. Wiskundige aktiviteiten voor kleuters.

Het derde deel bevat de hoofdstukken:

1. In 't gebroken. Breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen.
2. De wereldjes van Wiskobas. Thema's en projekten.
3. Help! Diagnostiseren en remediëren.
4. Zie je iets in die methode. Analyseren van reken/wiskundemethoden.
5. Welke wiskundeleraar ben jij? Vijfentwintig mathematisch-didaktisch en pedagogische opgaven.

Hoofdstuk 1 van deel 1 is bedoeld als een inleiding in de rekendidaktiek. Door het oplossen van rekenproblemen in het achttallig stelsel leert de student zich in te leven in basisschoolleerlingen die leren rekenen.
In hoofdstuk 2 komen de verschillende funkties van getallen aan de orde, de geschiedenis en eigenschappen van ons tientallig stelsel en concretiseringen ervan.
Hoofdstuk 3 behandelt de bouwstenen van het getalbegrip en de principes van het voorschoolse leren. Vele observaties geven inzicht in de manieren waarop 4-8 jarigen zich getalbegrippen verwerven.

Hoofdstuk 4 gaat over ordenend en schattend tellen.
Het belang van dit hoofdstuk is niet alleen dat studenten inzicht krijgen in het verschijnsel tellen als veelsoortige aktiviteit. Dit leerstofgebied blijkt zeer goed bruikbaar voor het leren leiden van leergesprekken met kleine groepjes leerlingen. Een groot aantal manieren van uitleggen wordt in dit kader besproken. Ook wordt een lesvoorbereidingsmodel gepresenteerd.
Hoofdstuk 5 geeft de student inzicht in het leren van de hoofdbewerkingen. De noodzaak van een brede begripsvorming vanuit veelsoortige situaties, modelvorming, het verwerven van denkstrategieën en basisvaardigheden wordt toegelicht. Ook het eigenschapsrekenen en het gevarieerd oefenen komt in dit hoofdstuk aan de orde.
Hoofdstuk 1 van deel 2 behandelt de bouwstenen voor het meetbegrip. Vanuit praktische meetsituaties krijgen de studenten inzicht in de manier waarop de leergang meten bij iedere grootheid kan worden opgebouwd.
Hoofdstuk 2 gaat over het verwerven van algorithmen. Vanuit het probleem van de tegelzetter wordt duidelijk hoe een algorithme (in dit geval: worteltrekken) via geleidelijke schematisering kan worden verworven.
Het leren cijferen via deze methode wordt voor de hoofdbewerkingen besproken.
In hoofdstuk 3 wordt het oplossen van 'rijke' problemen vergeleken met het oplossen van redactieopgaven. De eigenschappen van de verschillende soorten redactieopgaven worden verkend en de student worden methodes aangereikt om een redactieopgave te veranderen in een contextopgave.
In hoofdstuk 4 komt de meetkunde aan de orde. Praktische meetkundige problemen geven de student inzicht in dit gebied. Besproken wordt hoe meetkunde een rol speelt in de leefwereld van 4-12 jarigen.
Hoofdstuk 5 is een ontdekkingstocht door de kleuterwiskunde. Met voorbeelden wordt aangegeven hoe via het aangrijpen van spontane situaties, het scheppen van situaties en het plannen langs doorgaande lijnen wiskundige aktiviteiten een rol kunnen spelen in het kleuteronderwijs.

Deel 3 begint 'in 't gebroken'. Via breuken volgens Bartjens, breukrekenen bij de Egyptenaren 4000 jaar geleden en verdeelaktiviteiten van basisschoolleerlingen komen met behulp van vele voorbeelden de verschillende breukbegrippen die voor de basisschool relevant zijn aan de orde. Gebruikmakend van deze analyse van het breukbegrip, met een bezinning op de fouten in de traditionele didaktiek en een analyse van spontane aanpakken van kinderen worden middels opdrachten voor de student bouwstenen voor een vernieuwde leergang breuken aangereikt. Na de beschrijving van een didaktische fenemenologie van het verhoudingsbegrip komen ook procenten en kommagetallen als verhoudingen aan de orde.
In hoofdstuk 2 'de wereldjes van Wiskobas' kan de student kiezen uit drie wiskobaspakketten (Waterland, Een blokje om en Schip ahoi) voor het praktisch uitwerken ervan tot een onderwijsleerpakket.
Hoofdstuk 3 gaat over diagnostiseren en remediëren van rekenfouten. Na een analyse van een peiling bij het cijferend vermenigvuldigen, en problemen bij het memoriseren van de tafels van vermenigvuldiging komen voorbeelden van analyse van schriftelijk werk, het observeren van leerlingen tijdens de les en klinische interviews als verschillende manieren van diagnostisch onderwijzen aan de orde. Ook de grenzen van hulp, extra hulp in rekenmethoden worden besproken terwijl de rekenproblemen in een wijder verband worden geplaatst.
Hoofdstuk 4 geeft informatie en aandachtspunten voor het analyseren van rekenmethoden.
Vijfentwintig mathematisch-didaktische opgaven vormen het laatste hoofdstuk.

Wiskunde en Didaktiek is een uitstekende leidraad voor het onderwijs in wiskunde en didaktiek aan de Pabo.
De auteur is er goed in geslaagd de constructivistische opvatting dat studenten hun 'eigen' wiskunde en wiskunde-didaktiek zowel praktisch als theoretisch moeten maken te realiseren.
Ook voor wiskunde-docenten in het voortgezet onderwijs is deze serie zeer informatief.

H. Sleurink

R. J. Brook, G. C. Arnold, T. H. Hassard en R. M. Pringle
Marcel Dekker, *The fascination of statistics*, New York 1986, 456 p., $ 29,50, ISBN: 0-8247-7329-2.

Dit boek is deel 4 in de serie 'Popular Statistics'. De vorige drie delen ken ik niet maar ze hebben intrigerende titels. Te weten:
deel 1: How to tell liars from the statisticians, van R. Hooke
deel 2: Educated Guessing: How to cope in an uncertain world, van S. Kotz en D. F. Stroup
deel 3: The statistical exorcist, dispelling statistics anciety, van M. Hollander en F. Proschan.
Het boek is onderverdeeld in 7 hoofdstukken. Daarin komen ter sprake: kansrekening, data-, toetsings- en schattingstheorie, experimenten, voorspellen en modelbouw. In ieder hoofdstuk wordt een aantal toepassingen besproken. Het boek is geschreven voor vele lieden, wetenschappers en studenten uit vele vakgebieden. De recensent heeft gezocht naar nieuwe toepassingen die hij als illustraties bij zijn onderwijs zou kunnen gebruiken. Helaas heb ik ze in dit boek niet gevonden.

J. L. Mijnheer

Examens Wiskunde voor lbo en mavo in 1987

Gert Bakker

De laatste jaren vinden er veelvuldig veranderingen plaats in de examens voor de diverse vakken en schooltypen. Deze veranderingen gaan ook niet voorbij aan het wiskunde-examen voor C- en D-niveau van lbo en mavo. Zij vinden hun oorsprong in beslissingen van de staatssecretaris van O. en W. mevrouw drs. N. J. Ginjaar-Maas en van de vaksectie Wiskunde lbo/mavo van de Centrale examencommissie vaststelling opgaven (Cevo).
Om docenten een indruk te geven van de aard van de veranderingen, heeft de Cevo eind augustus 1986 een voorbeeldexamen voor C en D voor het vak wiskunde aan de scholen gestuurd.

Veranderingen in 1982

In 1986 kwam de zogenaamde harmonisatie voor het C-examen tot stand. Dit houdt in dat de lbo- en mavo-C-examens identiek zijn. Reeds in 1983 was het open vragen examen wiskunde voor leao, lhno, llo, lmo, lto en mavo-3 identiek. Vanaf 1986 is dat dus ook het geval voor het vierkeuze-examen.
De examens voor C-niveau gaan over het gemeenschappelijke in de examenprogramma's van de verschillende schooltypen. Goniometrie bijvoorbeeld, moet dus vanaf 1986 voor lto-C en mavo-C alleen in het schoolonderzoek getoetst worden, in afwachting van een nieuw examenprogramma.

Een tweede verandering was de operatie van twee naar één zitting, dus een halvering van de examenduur. Deze verandering betrof zowel het C-, als het D-niveau.
Omdat er een grote wijziging voor 1987 op stapel stond, is er voor gekozen geen ingrijpende veranderingen in de examens van 1986 aan te brengen. Het meest voor de hand liggende was een examen half om half: één uur gesloten vragen en één uur open vragen. De gesloten vragen zijn wat vereenvoudigd zodat het aantal vragen voor een uur kon worden uitgebreid van 15 tot 20.

t/m 1985		1986	1987
30 vier keuze vragen	± 13 open vragen	20 vier keuze-vragen	30 meer-keuze-vragen
		6 open vragen	3 open vragen

Veranderingen in 1987

Voor 1987 neemt het aantal gesloten vragen, vergeleken met 1986 toe en neemt het aantal open vragen af. Aanleiding voor deze verandering is het besluit van staatssecretaris Ginjaar-Maas om de lbo- en mavo-examens uit een groter aantal objectief scoorbare vragen te laten bestaan, dat wil zeggen uit allerlei vraagvormen waarbij de antwoorden machinaal verwerkt kunnen worden. De meerkeuzevraag met één antwoord goed is hiervan het bekende voorbeeld. Maar er zijn allerlei variaties van vraagvormen denkbaar.

In 1983 vroeg de staatssecretaris het Centraal Instituut voor Toetsontwikkeling (Cito) of het mogelijk was de objectiviteit en de betrouwbaarheid van de lbo- en mavo-examens te vergroten. Zij dacht daarbij aan het opnemen van meer objectief scoorbare vragen in het eindexamen. Het Cito analyseerde vervolgens de beschikbare examenprogramma's en kwam in zijn algemeenheid tot de conclusie dat er weliswaar meer objectief scoorbare vragen in de examens opgenomen konden worden maar dat bepaalde onderdelen van examenprogramma's zich daar niet of nauwelijks voor lenen. Voor dergelijke onderdelen zouden open vragen moeten blijven.

Vandaar dat het Cito de staatssecretaris adviseerde om in het wiskunde-examen ook open vragen op te nemen.
De staatssecretaris nam daarop het besluit dat alle examenvakken bij lbo en mavo voor minimaal 70% uit objectief scoorbare vragen moeten bestaan en voor maximaal 30% uit open vragen. Daarbij tekende ze aan dat er zoveel mogelijk soorten objectief scoorbare vragen in de examens opgenomen zouden moeten worden.

Open vragen zijn onmisbaar bij o.a. het toetsen van problemen waarbij het zelfstandig formuleren van een gedachtengang in de vorm van een algoritme of bewijsvoering op de voorgrond staat. Ook voor tekenopdrachten zijn open vragen nodig. Het is van groot belang dat examens zich niet te veel toespitsen op eindprodukten, maar ook het wiskundig proces dat tot die eindprodukten leidt, beoordelen. Open vragen met redelijk gedifferentieerde correctievoorschriften lenen zich daar beter voor dan meerkeuzevragen.

Wat de objectief scoorbare vragen betreft, willen de examenopstellers op dit moment niet verder gaan dan drie-, vier-, vijf- en zeskeuzevragen met één antwoord goed. Andere vraagvormen zijn óf te incidenteel bruikbaar óf moeilijk toegankelijk voor de kandidaat. (Wel algemeen bruikbaar lijkt de meerkeuzevraag met een wisselend aantal goede alternatieven, maar deze zal niet op korte termijn worden ingevoerd. Met betrekking tot deze vraagvorm is enige studie verricht[1].
Kortom, voor 1987 zal het examen voor zo'n 70% uit meerkeuzevragen en voor zo'n 30% uit open vragen bestaan. De percentages slaan zowel op het te behalen aantal punten als op de tijd, die kandidaten nodig hebben om de vragen te maken.
Hierna wordt aangegeven welke concrete invulling de Cevo geeft aan het examen 1987.

Aantal vragen en niveau

In 1987 worden in het opgavenboekje achtereenvolgens 30 meerkeuzevragen en 3 open vragen opgenomen.
Van de 30 meerkeuzevragen zijn er 20 die naar de mening van de Cevo-leden behoren tot de basiskennis en/of basisvaardigheden. Zij verwachten dat zo'n vraag gemiddeld in 2 minuten tijd gemaakt kan worden.
De andere 10 meerkeuzevragen betreffen verdergaande kennis en vaardigheden waarvoor gemiddeld 4 minuten per vraag gepland is.
Beide soorten meerkeuzevragen staan door elkaar. De volgorde is, net als in vorige examens, min of meer onderwerpsgewijs.
De open vragen doen een beroep op de inventiviteit van de kandidaat.
Vergeleken met vroeger leveren de cruciale stappen in het oplossingsproces naar verhouding wat meer punten op.
In het opgavenboekje is aangegeven welke open vragen bij elkaar horen.

Formulering van meerkeuzevraag

Evenals bij elke open vraag dient ook bij elke meerkeuzevraag de opdracht aan de leerling zo duidelijk mogelijk omschreven te zijn.
In veel gevallen heeft deze visie geleid tot het invoegen van een extra zin, zoals:
Bereken $f(-3)$.
Los op: $f(x) = -2$.
Druk de omtrek uit in p.
Arceer de verzameling V.
Teken de cirkel c.
Lees uit de figuur af voor welke x geldt $3 < f(x) < 5$.
Los x op uit het stelsel $\begin{matrix} 2x + y = 3 \\ x - 3y = 1 \end{matrix}$
Op deze wijze zijn de opdrachten wat concreter gesteld dan in het verleden.
Ook het zinsdeel dat de alternatieven inleidt, ziet er vaak anders uit, bijvoorbeeld:
Deze ligt het dichtst bij .....
De uitkomst is .....
De oplossing ligt tussen .....
Deze veranderingen houden verband met de wijze waarop de alternatieven worden gepresenteerd.

Formulering van alternatieven

Er is nog meer dan vroeger naar gestreefd de kandidaten voor hun antwoord geen houvast te geven

aan de alternatieven. Er zijn minder mogelijkheden om de gegeven alternatieven door invullen af te checken. Voorbeeld:
Gegeven is de parabool $y = x^2 + x$ en een raaklijn $y = 3x + p$.
Bereken p.

p ligt tussen		$p =$
a -10 en $-2\frac{1}{2}$		a -4
b $-2\frac{1}{2}$ en $-\frac{1}{2}$	in plaats van	b -1
c $-\frac{1}{2}$ en $-1\frac{1}{2}$		c 1
d $-1\frac{1}{2}$ en 9		d 4

Het niet expliciet vermelden van $p = -1$ bij de alternatieven voorkomt dat de kandidaat de opdracht omzeilt en gaat proberen.
Soms wordt het wel iets moeilijker om na de berekening het goede alternatief te kiezen. In het voorbeeld moet namelijk nog nagegaan worden tussen welke getallen -1 ligt.
Overigens ontstaat een goede open vraag wanneer de alternatieven a b c d weggelaten worden. Met de aangepaste formuleringen heeft de Cevo willen proberen de meerkeuzevraag wat meer het karakter van de open vraag te geven. Het is denkbaar dat leerlingen hierdoor weleens meer activiteiten kunnen uitvoeren, dan blijkens de alternatieven van hen gevraagd worden.

Puntentoekenning en cijfer

Voor de meerkeuzevragen kunnen 60 punten behaald worden (elke vraag óf 0 óf 2 punten). Voor de drie open vragen zijn samen 30 punten beschikbaar. Deze worden toegekend aan de hand van een bindend correctievoorschrift.
De behaalde score kan dus variëren van 0 tot en met 90.
Score 90 correspondeert met het cijfer 10. De omzetting van score naar cijfer is lineair. Het cijfer hangt af van de cesuurbepaling (grens onvoldoende/voldoende). Wordt deze door de Cevo vastgesteld op bijvoorbeeld 48/49 dan hoort bij de score 48,5 het (nog niet afgeronde) cijfer 5,45. Het laagste cijfer is 1,0.

Tot slot

Het verdient sterk aanbeveling om de beide voorbeeldexamens die de docenten wiskunde in augustus ontvingen goed te bestuderen omdat er meer veranderd is dan misschien op het eerste gezicht lijkt. Naast de hiervoor gemelde veranderingen is bijvoorbeeld ook de tendens van de laatste jaren om het formele taalgebruik wat terug te dringen voortgezet.
Ook is te zien dat het aantal alternatieven wat varieert, afhankelijk van de fouten die gemaakt kunnen worden: het strakke keurslijf van vier antwoorden is dus verdwenen.
Het is raadzaam enige tijd voor het examen dit voorbeeldexamen bij wijze van proef af te nemen, liefst in twee aaneengesloten klokuren. De leerlingen raken dan enigszins vertrouwd met de veranderingen.
Ook kunnen zij dan ervaring opdoen met de beschikbare tijd van 80 minuten voor het meerkeuzewerk en 40 minuten voor het open werk.
Een kandidaat kan afhankelijk van zijn capaciteiten natuurlijk wat minder of meer tijd aan de meerkeuzevragen besteden of eerst de open vragen maken.
Het examen van 1988 zal in grote lijnen dezelfde opzet hebben als dat van 1987.

Noten

1 Gert Bakker/Rob van Krieken (1986), *Meerkeuzevragen met een variabel aantal alternatieven goed. Specialistisch bulletin*, nr. 43, Cito Arnhem.

***Over de auteur*:**
Gert Bakker is werkzaam als wetenschappelijk medewerker wiskunde op het Cito. Hij begeleidt adviescommissies van docenten wiskunde die examenvoorstellen voor de Cevo maken.

Inhoud

Jaarrede 1986 129

Notulen algemene vergadering 1986 131

Fred Goffree, Jos ter Pelle: Van Rekenen (op je 10de) naar Wiskunde (op je 16de) 137

R. Troelstra: Vrijdag de dertiende 143

Hans Pouw: Differentiatie in heterogene groepen 147

Heleen Verhage, Truus Dekker: 'Vrouwen en Wiskunde' verkent het internationale circuit 151

Gert Bakker, Examens Wiskunde voor lbo en mavo in 1987 158

Mededelingen 136, 142

Recreatie 155

Boekbesprekingen 156

Kalender 156

Adressen van auteurs

Gert Bakker, p/a CITO, Postbus 1034, 6801 MJ Arnhem

Prof. dr. Fred Goffree, Bremlaan 16,
3735 KJ Bosch en Duin

H. Pouw, J. van Ruijsdaelstraat 112, 3583 CN Utrecht

R. Troelstra, Eemnesserweg 183, 1223 GE Hilversum

H. Verhage, Van Lennepdwarsstraat 1, 3532 TJ Utrecht